MAT244 - Année universitaire 2006-2007

Mathématiques

Contrôle continu No.1

Questions de Cours

1) Donner la définition d'une forme linéaire.
2) Donner la définition de la base duale associée à une base de formes linéaires.
3) Énoncer le théorème du rang.
4) Énoncer le théorème de Silverster.

Exercice 1 Réduire la forme quadratique

$$q(x,y,z,t) = xy + yz + zt + tx.$$

Exercice 2 Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$q(x,y,z) = x^2 + z^2 + 2xz + 4yx + 4yz$$

1) Appliquer la réduction de Gauss, en prenant comme pivôts x puis z.
2) Même question en prenant z puis x.
3) Montrer que $q(x,y,z) = (x+y+z)^2 - (x-y+z)^2 + (x+z)^2$
4) Montrer de deux façons différentes que les formes linéaires

$$f_1(x,y,z) = x + y + z,\ f_2(x,y,z) = x - y + z,\ f_3(x,y,z) = x + z$$

sont liées.

5) Donner toutes les relations possibles entre ces trois formes.

Exercice 3 Soit $E = \mathbb{R}^4$ et E^* son dual. Soit

$$q(x,y,z,t) = x^2 + 2y^2 + z^2 + 6t^2 - 2xy + 2xz + 2xt - 4yz + 4yt$$

1) Appliquer la méthode de Gauss et montrer que

$$q(x,y,z,t) = (x-y+z+t)^2 + (y-z+3t)^2 - (z-2t)^2$$

Soit

$$f_1(x,y,z,t) = x - y + z + t,\ f_2(x,y,z,t) = y - z + 3t,\ f_3(x,y,z,t) = z - 2t.$$

2) Quelle est la signature de q.
3) La famille $\{f_1, f_2, f_3\}$ est-elle une famille libre de E^*.
4) Compléter cette famille en une base $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ de E^*.
5) Calculer la base duale $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ associée.