MAT244 - Année universitaire 2006-2007

Mathématiques

Contrôle continu No.2

Exercice 1 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E. Soit q une forme quadratique sur E et φ la forme polaire associée.

1) Rappeler la définition de la matrice $A = (a_{i,j})_{i,j=1\ldots n}$ de q dans la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$.
2) On note $(x_i)_{i=1..n}$ les coordonnées dans la base. Montrer que $a_{i,j} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial x_i \partial x_j}$.

Exercice 2 Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$q(x) = x_1^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

1) Quelle est la matrice A de q dans la base canonique.
2) Donner la forme polaire $\varphi(x, x')$ asociée à q.
3) Appliquer la méthode de Gauss à q. Vérifier le résultat.
4) Trouver une base q-orthogonale $\{e_1, e_2, e_3\}$ à partir de la réduction obtenue.
5) Vérifier que la base obtenue est bien q-orthogonale.
6) On note X le vecteur colonne des coordonnées dans la base canonique, et Y celui des coordonnées dans la nouvelle base. Comment forme-t-on la matrice P telle que $X = PY$. Justifier.
7) Quelle est la matrice Δ de q dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$?
8) Quelle est la relation entre A, Δ et P? La vérifier par un calcul matriciel.

Exercice 3 Soit $q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$ sur $\mathbb{R}^3$. Déterminer l'orthogonal par rapport à q de l'espace vectoriel V d'équation $x_1 + x_2 = 0$.

Exercice 4 Soit $q(x) = (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2$ sur $\mathbb{R}^3$.

1) Montrer que q est définie positive, sans utiliser la méthode de Gauss.
2) Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gramm-Schmidt à la base canonique.
3) Vérifier que le résultat est bien une base orthonormale.