EXERCICE 2 (13 points)

Dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm, on considère la courbe C dont un système d'équations paramétriques est :

$$\begin{cases} x = f(t) = \dfrac{5}{1+t^2} \\ \\ y = g(t) = t^2 - 3t \end{cases} \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [-2\,,3].$$

1. Calculer $f'(t)$ et $g'(t)$ où f' et g' sont les fonctions dérivées respectives des fonctions f et g.

2. Étudier les signes respectifs de $f'(t)$ et $g'(t)$ lorsque t varie dans l'intervalle $[-2\,,3]$.

3. Rassembler les résultats dans un tableau de variation unique.

4. Déterminer un vecteur directeur de la tangente à la courbe C en chacun des quatre points E, F, G et H obtenus respectivement pour $t = -2$, pour $t = 0$, pour $t = 1{,}5$ et pour $t = 3$.

5. Placer les points E, F, G et H et tracer avec précision sur une feuille de papier millimétré la tangente en chacun de ces points, puis la courbe C.

1. $f(t) = \frac{5}{1+t^2}$ $\quad f'(t) = -5\,\frac{(1+t^2)'}{(1+t^2)^2} = -5\,\frac{2t}{(1+t)^2} = \frac{-10t}{(1+t^2)^2}$

$g(t) = t^2 - 3t$ $\quad g'(t) = 2t - 3$

2. $-10t \geq 0$ pour $t \leq 0$

$(1+t^2)^2 > 0$ pour tout $t \in [-2 ; 3]$

t	-2		0		3
$10t$		$+$	0	$-$	
$(1+t^2)^2$		$+$		$+$	
$f'(t)$		$+$	0	$-$	

$2t - 3 \geq 0$ pour $t \geq \frac{3}{2}$

t	-2		$3/2$		3
$2t-3$		$-$	0	$+$	
$g'(t)$		$-$	0	$+$	

3.

t	-2		0		$3/2$		3
$f'(t)$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(t)$		↗		↘		↘	
$g'(t)$		$-$		$-$	0	$+$	
$g(t)$		↘		↘		↗	
$f\circ g(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4. $E(x_E, y_E)$ $\quad x_E = \dfrac{5}{1+(-2)^2} = 1$

$y_E = (-2)^2 - 3(-2) = 10$

$E(1;10)$

de même $F(5;0)$, $G(1{,}54;-2{,}25)$; $H(0{,}5;0)$.

En E, vecteur directeur à la courbe C : $\vec{v_E}\,(f'(-2)\,;\,g'(-2))$

$f'(-2) = +0{,}8$ $\quad \vec{v_E}\,(+0{,}8\,;\,-7)$
$g'(-2) = -7$

de même $\vec{v_F}\,(0\,;\,-3)$
$\vec{v_G}\,(-1{,}42\,;\,0)$
$\vec{v_H}\,(-0{,}3\,;\,3)$

5.