BACCALAUREAT GENERAL

BAC BLANC ANACOURS
SESSION 2013 n°1

MATHEMATIQUES

Série S

DUREE DE L'EPREUVE : 4 h

L'usage d'une calculatrice EST autorisé

Ce sujet ne nécessite pas de feuille de papier millimétré

Ce sujet comporte 4 exercices, présentés sur 7 pages numérotées 1 à 7, y compris celle-ci.

Les pages d'annexes (pages 6 et 7) SONT A RENDRE AVEC LA COPIE, même si elles n'ont pas été complétées.

Le candidat doit traiter les 4 exercices, qui sont indépendants les uns des autres.

Exercice 1 — 4 points

Cet exercice constitue une restitution organisée de connaissances.

Partie A : question de cours

On suppose connus les résultats suivants :
(1) deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque : l'une est croissante, l'autre est décroissante et $u_n - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$;
(2) si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, on a $u_n \leqslant v_n$;
(3) toute suite croissante et majorée est convergente ; toute suite décroissante et minorée est convergente.
Démontrer alors la proposition suivante :

« Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite ».

Partie B

On considère une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{-2}{u_n}$.
Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.
2. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.
3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.
4. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers zéro.

Exercice 2 5 points

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = (x^2 + x + 1)\mathrm{e}^{-x} - 1.$$

1. a. Déterminer les limites de φ en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b. Étudier le sens de variations de φ puis dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, dont l'une dans l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$, qui sera notée α.
   Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
3. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$ et le présenter dans un tableau.

Partie B : Étude de la position relative de deux courbes

Sur la feuille annexe page 5 sont tracées les courbes représentatives de deux fonctions f et g.
Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x + 1)\mathrm{e}^{-x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}.$$

Leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ sont notées $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

1. Démontrer que les deux courbes passent par le point A de coordonnées $(0\,;\,1)$ et admettent en ce point la même tangente.
2. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f(x) - g(x) = \dfrac{(2x + 1)\varphi(x)}{x^2 + x + 1}$ où φ est la fonction étudiée dans la **partie A**.
3. À l'aide d'un tableau, étudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Exercice 3 **6,5 points**

Pour les questions 1 et 2, on donnera les résultats sous forme de fraction et sous forme décimale approchée par défaut à 10^{-3} près.

Un enfant joue avec 20 billes : 13 rouges et 7 vertes. Il met 10 rouges et 3 vertes dans une boîte cubique et 3 rouges et 4 vertes dans une boîte cylindrique.

1. Dans un premier jeu, il choisit simultanément trois billes au hasard dans la boîte cubique et il regarde combien de billes rouges il a choisies. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de billes rouges choisies.

  a. Déterminer la loi de probabilité de X.

  b. Calculer l'espérance mathématique de X.

2. Un deuxième jeu est organisé de telle sorte que l'enfant choisisse d'abord au hasard une des deux boîtes, puis qu'il prenne alors une bille, toujours au hasard, dans la boîte choisie. On considère les évènements suivants :

C1 : « L'enfant choisit la boîte cubique »,

C2 : « L'enfant choisit la boîte cylindrique »,

R : « L'enfant prend une bille rouge »,

V : « L'enfant prend une bille verte ».

  a. Représenter par un arbre pondéré la situation correspondant à ce deuxième jeu.

  b. Calculer la probabilité de l'évènement R.

  c. Sachant que l'enfant a choisi une bille rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boîte cubique ?

3. L'enfant reproduit n fois de suite son deuxième jeu, en remettant à chaque fois la bille tirée à sa place.

  a. Exprimer, en fonction de n, la probabilité p_n que l'enfant ait pris au moins une bille rouge au cours de ses n choix.

  b. Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geqslant 0,99$.

  c. Compléter l'algorithme donné en annexe, permettant également d'accéder à cette valeur de n.

Exercice 4 **4,5 points**

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$$

et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan. La droite (D) d'équation $y = -x - 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$. On a représenté sur la feuille annexe la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite (D).

1. Soit a un nombre réel. Écrire, en fonction de a, une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point M d'abscisse a.
2. Cette tangente (T) coupe la droite (D) au point N d'abscisse b. Vérifier que $b - a = -1$.
3. En déduire une construction, à effectuer sur la feuille annexe, de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point M d'abscisse $1,5$. On fera apparaître le point N correspondant.

Partie B

1. Déterminer graphiquement le signe de f.
2. En déduire pour tout entier naturel non nul n les inégalités suivantes :

$$(1) \quad \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 + \frac{1}{n} \qquad (2) \quad \mathrm{e}^{\frac{-1}{n+1}} \geqslant 1 - \frac{1}{n+1}$$

3. En utilisant l'inégalité (1), démontrer que pour tout entier naturel non nul n

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}$$

4. En utilisant l'inégalité (2), démontrer que pour tout entier naturel non nul n

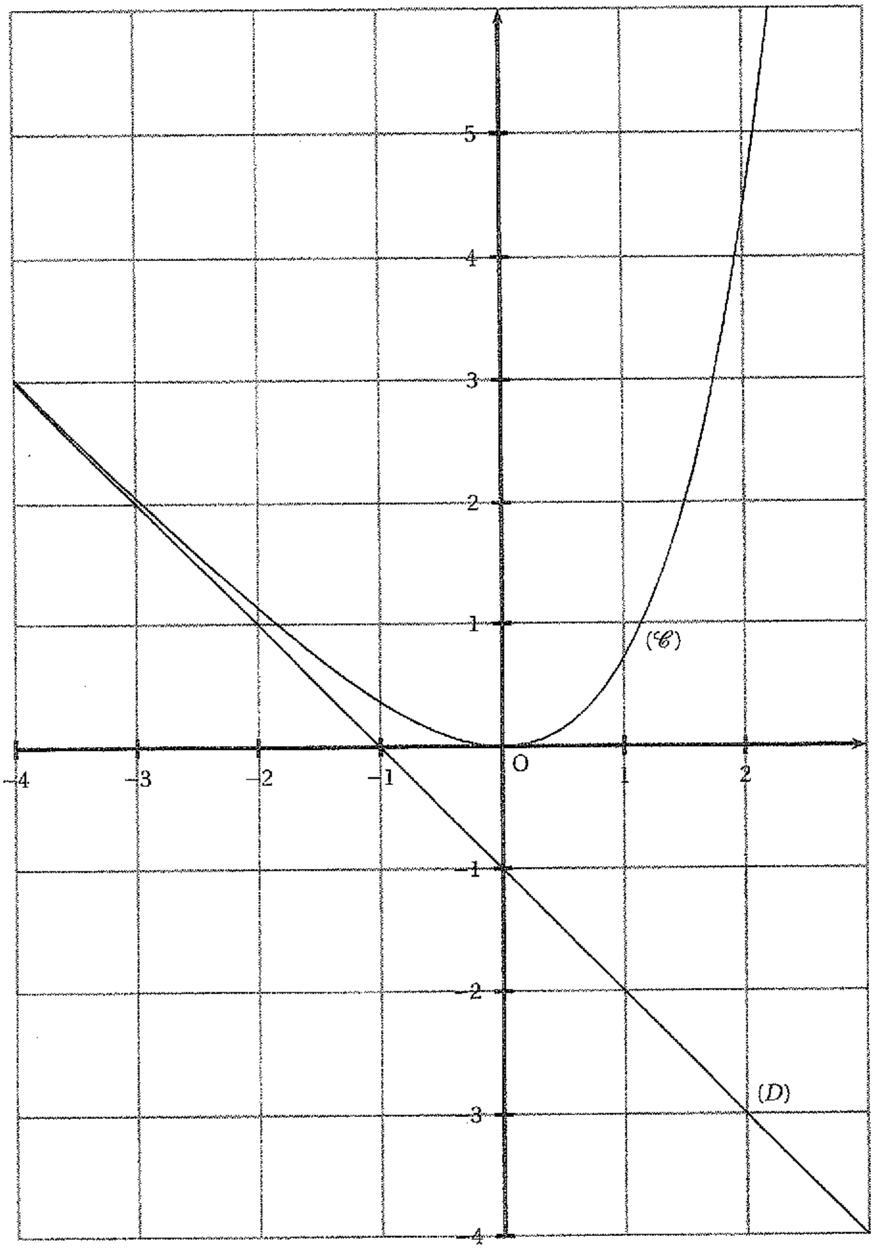
$$\mathrm{e} \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

5. Déduire des questions précédentes un encadrement de

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

puis sa limite en $+\infty$.

ANNEXE (à rendre avec la copie)



INITIALISATION

Déclaration de la variable **P**, nombre réel
Déclaration de la variable **Q**, nombre réel
Déclaration de la variable **N**, nombre ....

DEBUT

N ⟵ ....

TANT QUE ....

Q ⟵ (73 / 182) ^ **N**
P ⟵ 1 - **Q**
N ⟵ **N** + 1

FIN TANT QUE

AFFICHER ....

FIN