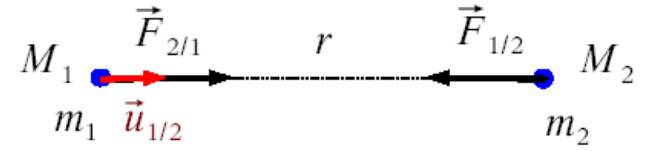
LA GRAVITATION

I – Forces d'attraction gravitationnelles

La force d'attraction entre deux masses ponctuelles m_1 et m_2 est donnée par :

$$\overrightarrow{F_{1/2}} = -G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \overrightarrow{u_{1/2}}$$



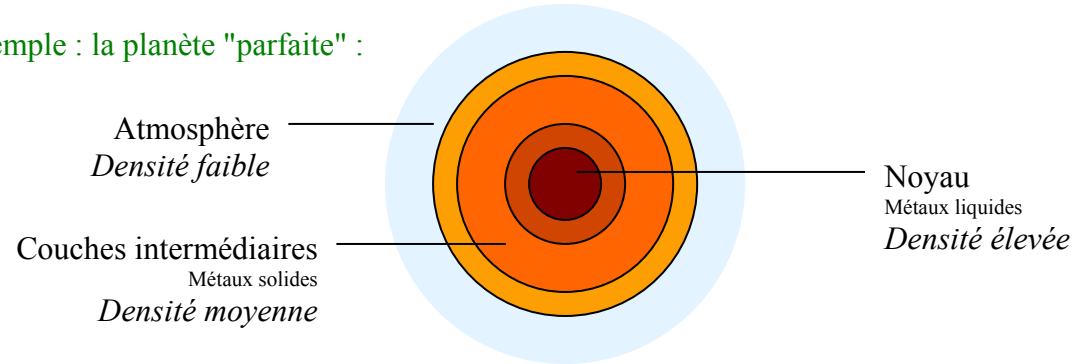
m_i : masse du corps M_i en **kg**
r : distance entre les deux corps en **m**
|F| force d'interaction gravitationnelle en **N**
u : vecteur unitaire porté par l'axe M_1M_2 orienté vers M_2
G : constante de gravitation universelle
$G = 6,67259 \cdot 10^{-11} m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$

On écrit aussi $\overrightarrow{F_{1/2}} = -K_G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^3} \cdot \overrightarrow{M_1M_2}$

D'après le principe de l'action et de la réaction, la force exercée par M_2 sur M_1 a même direction, même intensité mais un sens opposé :
$\overrightarrow{F_{1/2}} = -\overrightarrow{F_{2/1}}$

Ces relations restent valables même si les masses ne sont pas ponctuelles mais elles doivent alors présenter une symétrie sphérique (théorème de Gauss). Autrement dit, le corps doit être sphérique mais aussi avoir une répartition homogène de la masse (symétrie sphérique). Cela n'impose pas que la masse volumique soit constante mais qu'elle évolue avec le rayon.

Exemple : la planète "parfaite" :



Aucun corps étudié en physique n'est si parfait, mais les erreurs dues à cette approximation à grande échelle sont assez faibles (exemples : mouvement des planètes et des satellites).

II – Champ de gravitation

La force de gravitation est une force d'interaction à distance. Si la masse m_1 est présente quelque part, toute masse m_2 subira une force. On peut réécrire la force $\overrightarrow{F_{1/2}}$:

$$\overrightarrow{F_{1/2}} = \left(-G\frac{m_1}{r^2} \cdot \overrightarrow{u_{1/2}} \right) m_2$$

On voit donc que toute masse m_2 est attirer avec une force $F_{1/2}$ dont la différence d'intensité ne dépend que de la différence de m_2. On peut définir un champ de vecteur, appelé champ de gravitation :

$$\vec{g}(r) = -G\frac{m_1}{r^2} \cdot \overrightarrow{u_{1/2}} \qquad [g] = L \cdot T^{-2}$$

g : champ de gravitation en **m.s^{-2}**
m_1 : masse du corps M_1 en **kg**
r : distance entre les deux corps en **m**
u : vecteur unitaire porté par l'axe M_1M_2 orienté vers M_2
G : constante de gravitation universelle

On peut alors réécrire la force : $\overrightarrow{F_{1/2}} = m_2 \cdot \vec{g}(r)$

Dans la pratique, on définit un champ de gravitation pour les grosses masses. Les corps célestes possèdent chacun un champ de gravitation qui attire satellites, astéroïdes etc…
Par exemple, dans l'approximation d'une Terre sphérique, on calcule le champ de gravitation pour un objet à la surface de la Terre par :

$$\vec{g}_0 = -G\frac{M_T}{R_T^2} \cdot \overrightarrow{u_{1/2}}$$

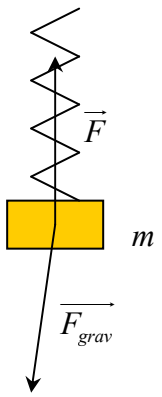
Selon les valeurs exactes de M_T et R_T choisies, on retombe sur la valeur connue de g_0 entre 9,5 et 10 m.s^{-2}.

III – Poids d'un objet

Cette partie ne constitue qu'une approche expérimentale de la définition du poids. Supposons une masse m accrochée à un ressort. Le poids est exactement l'opposé de la force $\vec{F}$ exercée par le ressort sur la masse. En appliquant le PFD, on a :

$$\vec{F} + \overrightarrow{F_{grav}} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} = \overrightarrow{F_{grav}} - m\vec{a} \text{ car } \vec{P} = -\vec{F}$$

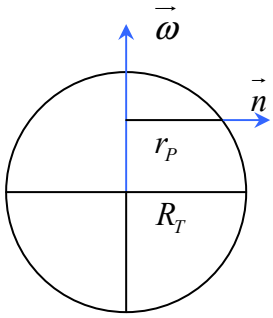
$$\vec{P} = \overrightarrow{F_{grav}} - m\vec{a}$$



Toujours dans l'approximation d'une Terre sphérique, on a $\overrightarrow{F_{grav}} = -m\vec{g}$. g vaut alors 9,81 m.s^{-2} à la surface de la Terre. Mais la Terre n'est pas tout à fait sphérique. Elle se rapproche d'un ellipsoïde d'aplatissement 2 fois 22km.
Cela a plusieurs conséquences :
- la force n'est pas égale à $-m\vec{g}$, ni en intensité, ni en direction

- la force exercée par la Terre ramène les objets vers le plan équatorial. Toutefois, l'effet lié à une force ellipsoïdale est faible comparé au terme d'accélération $m\vec{a}$.

La masse suspendue sous le ressort n'est pas immobile car la Terre tourne sur elle-même et aussi autour du Soleil. La rotation autour de la Terre autour de son axe Nord-Sud entraîne la masse m dans un mouvement circulaire uniforme. L'accélération est donc $-r_P\omega^2\vec{n}$



Ce terme est nul aux pôles et est maximum à l'équateur ($R_T\omega^2 = 0,034\ m\cdot s^{-2}$).

La rotation de la Terre autour du Soleil conduit à une Seconde accélération 6 fois plus faible (0,006 m.s^{-2}). Elle n'est généralement par parallèle à l'équateur, son module, sa direction et son sens (vers le Soleil) sont à peu près constants tout autour de la Terre. Elle existe donc cette fois aux pôles.

Bilan : Si l'on suppose la Terre sphérique et si l'on néglige l'effet de la rotation de la Terre autour du Soleil, le poids peut s'écrire :

$$\vec{P} \approx \left(-G\frac{M_T}{r^2}\vec{u_r} + r_P\omega^2\vec{n}\right)m$$

IV – Accélération locale de la pesanteur

- A la surface de la Terre :

La quantité $\frac{\vec{P}}{m}$ représente donc un champ de vecteurs indépendant de la masse m :

$$\frac{\vec{P}}{m} \approx -G\frac{M_T}{r^2}\vec{u_r} + r_P\omega^2\vec{n}$$

Ce champ de vecteurs ressemble étrangement au champ de pesanteur.

$\vec{g} \approx -G\frac{M_T}{r^2}\vec{u_r}$ on néglige le terme d'accélération par souci de simplification.

A la surface de la Terre, r = R_T et on pose g = g_0. A une altitude z, r = R_T + z.

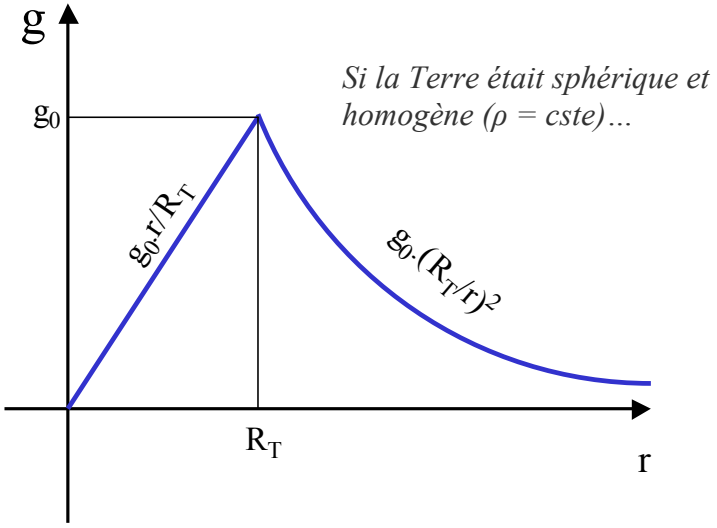
$$\frac{g}{g_0} = \left(\frac{R_T}{R_T + z}\right)^2 = \left(\frac{1}{1 + z/R_T}\right)^2 \approx 1 - 2\frac{z}{R_T}$$

Sur Terre, la diminution est de 0,3% à 10 km d'altitude.

- Sous la surface de la Terre :

L'accélération de la pesanteur est en toute logique nulle au centre de la Terre.

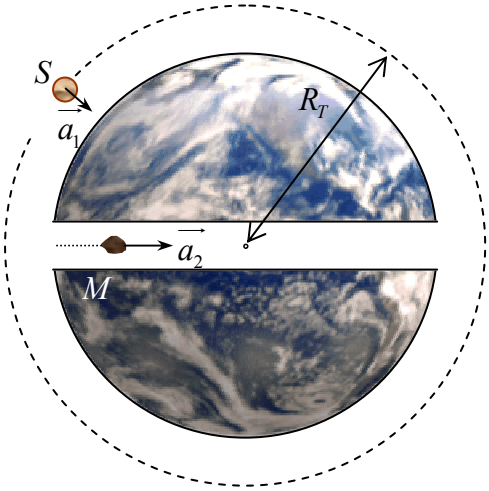
Mais pour pour $0 < r < R_T$, le problème est compliqué si la masse volumique n'est pas constante, ce qui est malheureusement le cas.
Par contre, si cette masse volumique est supposée constante, g est linéaire jusqu'à la surface où il vaut g_0 (voir théorème de Gauss). A l'extérieur, comme nous l'avons déjà vu, g varie en $1/r^2$.



Un problème amusant consiste à supposer que l'on puisse creuser un tunnel d'un bout à l'autre de la terre en passant par son centre. Si g varie comme r (variation linéaire). La force d'attraction d'un objet lâché à un bout est don proportionnel à la distance au centre. On observera alors des oscillations autour du centre de la Terre. On pourrait mesurer alors la période qui est égale à la période de révolution d'un satellite qui ferait le tour de la Terre.

$$T_S = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T+z)^3}{GM_T}}$$

$$\overrightarrow{a_S} = r\omega^2\overrightarrow{N}$$



$$T_M = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\overrightarrow{a_M} = \frac{g_0 r}{R_T}\overrightarrow{N}$$

On peut montrer facilement que k dépend de m, puis que m/k est simplement égal à r^3/GM_T

Durant des temps égaux, le satellite effectue un tour complet autour de la Terre tandis que la masse M fait un aller-retour de chaque côté de la Terre.

V – Travail et énergie potentielle

On se limitera au cas où $r > R_T$. On retiendra deux cas : g constant (au voisinage de la surface de la Terre et g en $1/r^2$ plus loin.

g constant ($r \approx R_T$)	*g varie en $1/r^2$ ($r > R_T$)*
FORCES DE PESANTEUR	
$\vec{F} = -mg\vec{k}$ repère cartésien classique avec k vers le haut	$\vec{F} = -G\frac{m \cdot M_T}{r^2}\overrightarrow{u_r} = -m\vec{g}(r)$
TRAVAIL DES FORCES DE PESANTEUR	
$d\vec{\ell} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ $dW = -mgdz$ $W_A^B = -mg(z_B - z_A)$	$d\vec{\ell} = dr \cdot \overrightarrow{u_r} + r \cdot d\overrightarrow{u_r}$ $dW = -G\frac{m \cdot M_T}{r^2}dr = d\left(G\frac{m \cdot M_T}{r^2}\right)$ $W_A^B = -GmM_T\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$
ENERGIE POTENTIELLE DE PESANTEUR	
$dE_p = +mgdz$ $E_{pp} = mgz + c^{ste}$	$dE_p = -d\left(G\frac{m \cdot M_T}{r}\right)$ $E_p = -G\frac{m \cdot M_T}{r} + c^{ste}$