Université Joseph Fourier
Licence de Physique-Chimie (**L3PC**)

TD Physique microscopique

TD 1 – Energies relativistes

1- Quantité de mouvement et énergie cinétique

a) On considère un électron dont la vitesse est égale à 0.95*c, où c est la vitesse de la lumière. Calculer son énergie cinétique E_c (en MeV) et sa quantité de mouvement p (en $MeVc^{-1}$).

b) Quelle est la valeur de pc, dans le cas d'un photon d'énergie10 keV, et dans le cas d'un proton d'énergie cinétique 5 GeV dont on calculera la vitesse.

2- Energie cinétique et énergie de masse*.

Quelle est la vitesse d'une particule, de masse au repos m_0, dont l'énergie cinétique est le quart de son énergie de masse? Quel est alors le rapport de sa quantité de mouvement sur m_0c ?

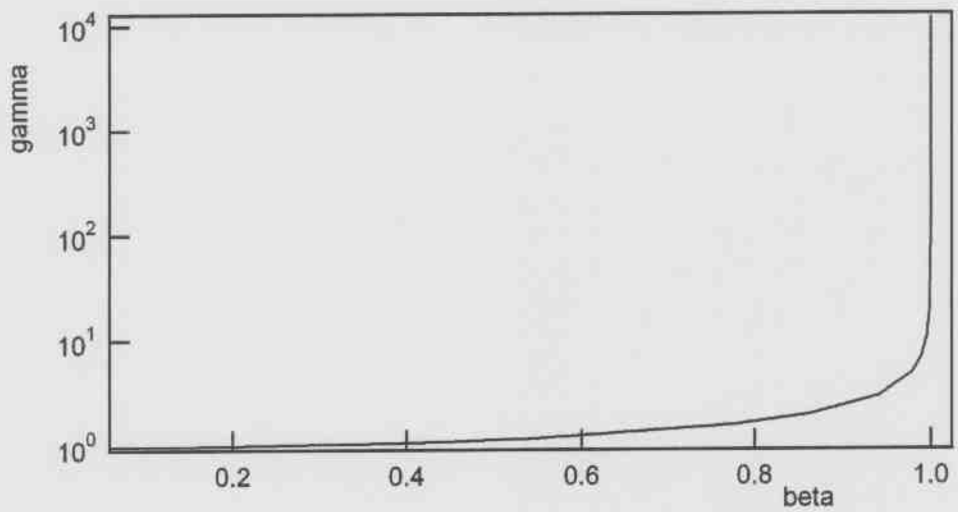
3- Calculs de β, γ pour des électrons et des protons.

a) Calculer $\beta=v/c$, $\gamma=(1-\beta^2)^{-1/2}$ et $1/2\ m_0v^2$ pour des électrons d'énergie cinétique
1, 10, 50, 100, 300, 500 keV
1, 2, 3, 5, 10, 30, 50, 100, 1000, 6000 MeV
ainsi que leur énergie au repos.

b) Même question pour des protons d'énergie cinétique
1, 2, 3, 5, 10, 30, 50, 100 MeV
1, 10, 20, 50, 100, 1000 GeV

c) A l'ESRF, les électrons à l'origine du rayonnement synchrotron ont une énergie cinétique de 6 GeV. La divergence verticale du faisceau de RX (largeur à mi-hauteur) peut être généralement considérée comme égale à $1/\gamma$. Calculer cette divergence.

* L'énergie m_0c^2 est indifféremment appelée énergie de masse ou énergie au repos.



10^4
10^3
10^2
10^1
10^0
gamma
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
beta

TD 1

1 a) $v = 0{,}95c$ électron $m_0 = 9{,}109.10^{-31}$ kg

$c = 3{,}00.10^{8}$ m/s

$$E_c = mc^2 - m_0 c^2$$

$$E_c = m_0 \gamma c^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 [\gamma - 1]$$

$$\gamma = \frac{1}{[1 - v^2/c^2]^{1/2}} = \frac{1}{[1 - 0{,}95^2]^{1/2}} = 3{,}2026$$

$$\gamma - 1 = 2{,}2026$$

$$E_c = 9{,}109.10^{-31} . 9.10^{16} . 3{,}2026 = 262{,}55.10^{-15}$$

$$E_c = 2{,}6255.10^{-13} \text{ Joules}$$

en eV $E_c = \frac{2{,}6255.10^{-13}}{1{,}602.10^{-19}} = 1{,}6389.10^{6} = 1{,}6389 \text{ MeV}$

$$p = mv = m_0 \gamma v = 9{,}109.10^{-31} . 3{,}2026 . 0{,}95 . 3.10^{8}$$

$$p = 83{,}14\ 10^{-23} = 8{,}314 . 10^{-22} \text{ N.s.}$$

b) pc

photon de 10 keV , si photon $m_0 = 0$

d'où $E = pc$ donc $pc = 10$ keV

proton de $E_c = 5$ GeV

$$E_c = M_0 c^2 (\gamma - 1) \qquad M_0 = 1{,}672.10^{-27} \text{ kg}$$

$$\gamma - 1 = \frac{E_c}{M_0 c^2} \quad , \quad \gamma = \frac{E_c}{M_0 c^2} + 1$$

en MKSA

$$\gamma = \frac{5 . 1{,}6.10^{-19} . 10^{9}}{1{,}672.10^{-27} . 9.10^{16}} + 1 = 6{,}316 \quad , \quad \gamma^2 = 39{,}89$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{c^2}{c^2 - v^2} \longrightarrow v^2 = c^2 \frac{(\gamma^2 - 1)}{\gamma^2}$$

$$v^2 = 9.10^{16} \frac{38{,}89}{39{,}89} = 8{,}774\ 10^{16} \Rightarrow v = 2{,}962.10^{8} \text{ m/s}$$

$$pc = m_0 \gamma v c = 9{,}384.10^{-10} \text{ Jouls} = 5{,}85 \text{ GeV}$$

2) m

$$E_c = \frac{m_0 c^2}{4}$$

$$E_c = mc^2 - m_0 c^2 \Rightarrow mc^2 = E_c + m_0 c^2$$
$$= \frac{5}{4} m_0 c^2$$

$$\cancel{m_0} \gamma \cancel{c^2} = \frac{5}{4} \cancel{m_0 c^2}$$

$$\gamma = \frac{5}{4} \qquad \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{25}{16}$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{16}{25} \qquad \frac{v^2}{c^2} = \frac{25 - 16}{25} = \frac{9}{25}, \ \frac{v}{c} = \frac{3}{5}$$

$$v = \frac{3}{5} c = 1{,}8 . 10^8 \, ms^{-1}$$

$$\frac{mv}{m_0 c} \qquad = \frac{p}{m_0 c} = \beta \gamma = \frac{3}{5}\frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

3) $\beta = v/c \qquad \gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} \qquad 1/2\, m v^2$

$$E_c = m_0 \gamma c^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 (\gamma - 1)$$

$$\gamma = 1 + \frac{E_c}{m_0 c^2}$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} \qquad 1 - \beta^2 = \frac{1}{\gamma^2}$$

$$\beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \qquad \beta = \left[\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}\right]^{1/2}$$

$$v = \beta c$$

$$\frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{m_0 \beta^2 c^2}{2} = m_0 c^2 \frac{\gamma^2 - 1}{2\gamma^2}$$

$m_0 c^2$

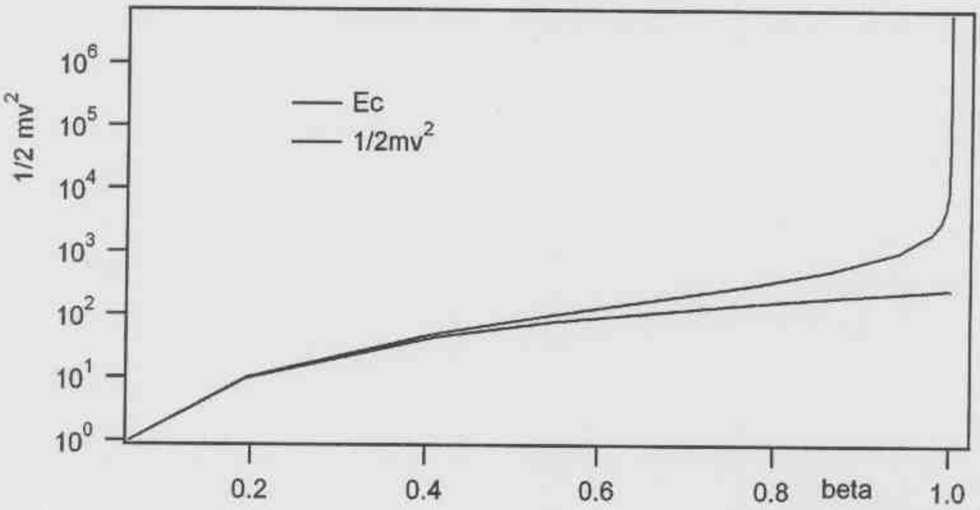
on voit que $\frac{1}{2} m_0 v^2 / m_0 c^2 = \frac{\gamma^2 - 1}{2\gamma^2}$

idem pour les protons avec m_0 remplacé par M_0

a) électrons $m_0 = 9,11.10^{-31}$ kg, $C = 2,998.10^{8}$ m/s

$m_0 C^2 = 511,116$ keV

E_c (keV)	γ	β	$\frac{1}{2}mv^2$ (keV)
1	1.00196	0.0624618	0.997052
10	1.01956	0.194964	9.71397
50	1.09783	0.412645	43.5154
100	1.19565	0.548173	76.7935
300	1.58695	0.776482	154.082
500	1.97825	0.862828	190.256
1000	2.9565	0.941061	226.321
2000	4.91301	0.979066	244.97
3000	6.86951	0.989348	250.142
5000	10.7825	0.99569	253.36
10000	20.565	0.998817	254.954
30000	59.6951	0.99986	255.486
50000	98.8251	0.999949	255.532
6e+06	11740	1	255.558



b) protons

$M_0 = 1,673.10^{-27}$ kg

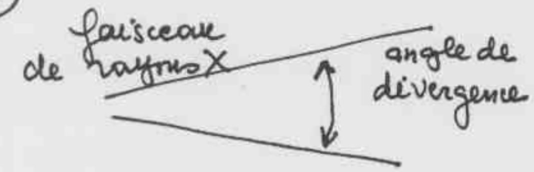
$M_0 C^2 = 938,635$ MeV

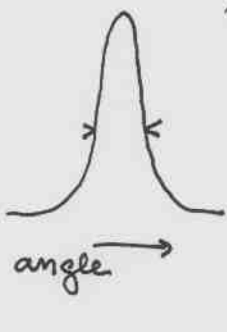
$M_0 C^2 = 0,939$ GeV

le graphe a une variation similaire à celle des électrons

E_c (MeV)	γ	β	$\frac{1}{2}mv^2$ (MeV)
1	1.00107	0.0461232	0.998401
2	1.00213	0.065176	1.99362
3	1.0032	0.0797604	2.98567
5	1.00533	0.102807	4.96031
10	1.01065	0.144816	9.8424
30	1.03196	0.246949	28.6207
50	1.05327	0.313993	46.2708
100	1.10654	0.428124	86.0215
1000	2.06538	0.874972	359.298
10000	11.6538	0.996312	465.862
20000	22.3075	0.998995	468.374
50000	54.2688	0.99983	469.158
100000	107.538	0.999957	469.277
1e+06	1066.38	1	469.317

c)





$\gamma = 1 + \frac{E_c}{m_0 C^2} = 11,74.10^{3}$

$\frac{1}{\gamma} = 8,52.10^{-5}$ radians

$\frac{1}{\gamma} = 28,4$ minutes d'arc

Université Joseph Fourier
Licence de Physique-Chimie

TD Physique microscopique

TD 2
Effet photoélectrique - Corps noir

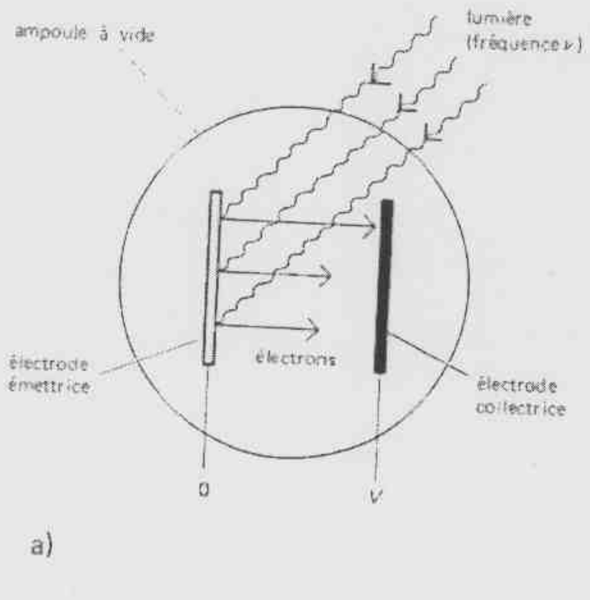
1- Effet photoélectrique

Un faisceau de lumière de fréquence ν frappe une électrode émettrice. Soit W le travail d'extraction de cette électrode. V est le potentiel seuil au-delà ou en dessous duquel le courant ne passe plus.

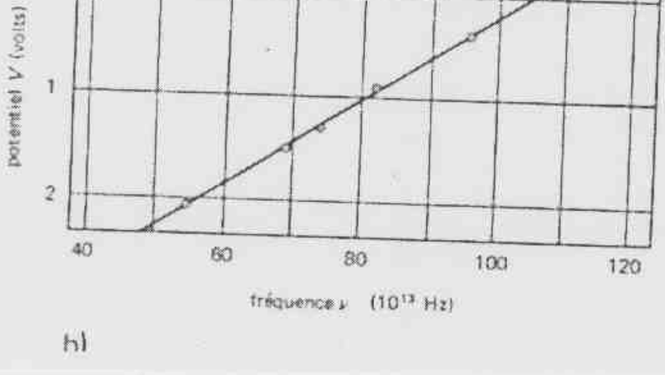
Le graphe 1 ci-dessous présente les résultats expérimentaux obtenus par R. A. Millikan pour une électrode émettrice de sodium.

a) Expliquer l'allure du graphe (envisager les deux cas où l'énergie des photons est supérieure ou inférieure à W).

b) Déduire du graphe une estimation de la constante de Planck.



a)



b)

2 - Loi du déplacement de Wien

On considère ici la densité d'énergie spectrale volumique exprimée en fonction de la longueur d'onde λ et de la température T.

a) Montrer que la longueur d'onde λ_m correspondant au maximum de la distribution spectrale de Planck $\rho(\lambda,T)$ varie comme α/T où T est la température du corps noir. Exprimer α en fonction de h, c et k_B.

b) La température de la surface du soleil étant égale à 5770 K, déterminer λ_m.

Données: *On admettra que la solution de l'équation $5(1-e^u)+ue^u=0$ est $u=4.965$.*

3 - Le rayonnement d'une surface noire

On perce un trou de surface S sur la paroi isotherme d'un corps noir à la température T. Le trou est suffisamment petit pour ne pas perturber l'équilibre thermique du rayonnement.

a) Calculer la puissance élémentaire $d\Phi$ émise dans l'angle solide $d\Omega$ autour d'une direction faisant l'angle τ avec la normale à la surface.

b) Montrer alors que la puissance totale rayonnée par cette surface peut être mise sous la forme $\Phi = \sigma_R ST^4$ ou σ_R s'exprime en fonction de la constante de Stefan σ et de la vitesse de la lumière c.

Données: $\int_0^\infty \frac{u^3}{e^u-1}du = \varsigma(4)\Gamma(4) = \frac{\pi^4}{15}$.

4 - Rayonnement du soleil et des planètes

a) Le rayonnement du soleil a un spectre dont la composition est voisine de celle d'un corps noir à une température de 6000 K. Déterminer la puissance rayonnée par le soleil.

b) Si L désigne la distance Terre-Soleil, calculer la puissance reçue du Soleil par unité de surface.

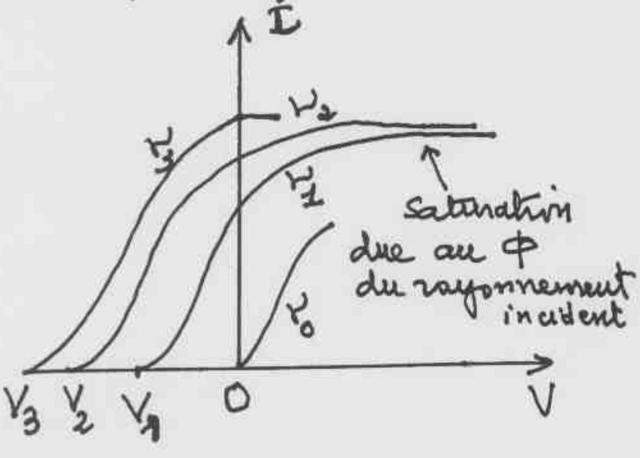
c) En assimilant la Terre à un second corps noir, déterminer sa température d'équilibre sous l'effet du rayonnement solaire.

Données: *Rayon du Soleil: $R_S = 0.7\ 10^6$ km*

Distance Terre-Soleil: $L = 1.5\ 10^8$ km

TD 2

1 <u>L'effet photoélectrique</u> est représenté par les courbes $I(V)$ ci-dessous



si on utilise avec le même montage donc la même electrode, des rayonnements de fréquences différentes, on obtient les courbes ci-contre

ν_0 : $i = 0$ si $V = 0$

$h\nu_0 = W$ énergie d'extraction et les électrons n'ont aucune énergie cinétique

ν_1 : il faut un potentiel négatif V_1 pour obtenir $i = 0$, donc pour repousser les électrons qui possèdent une énergie cinétique $\frac{1}{2}mv^2 = -eV_1 = |eV_1| > 0$

on a $h\nu = W \underbrace{-eV_1}_{>0}$ ou $-eV_1 = h\nu - \underbrace{h\nu_0}_{W}$

$$V_i = -\frac{h}{e}\nu + \frac{h}{e}\nu_0$$ donc relation linéaire entre V_i et ν

si l'énergie $h\nu$ des photons est supérieure à $W = h\nu_0$, on observe l'effet photoélectrique.

la pente de la variation $V = a\nu \rightarrow \left|\frac{dV}{d\nu}\right| = \frac{h}{e}$

d'où

$$\frac{h}{e} = \frac{\cancel{0} - 2}{104 - 57} \frac{\text{volts}}{10^{13}\text{Hz}} = \frac{2}{47} = 4{,}255 \cdot 10^{-2}$$

d'où $h = 6{,}82 \cdot 10^{-34}$ J.S (valeur réelle $6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J.S)

incertitude $\frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{0{,}5}{104} + \frac{0{,}5}{57} \leq 2\,10^{-2}$

$$h = 6{,}8 \pm 0{,}15 \cdot 10^{-34} \text{ J.S.}$$

2 <u>loi de déplacement de Wien</u>

a) on a dans le cours la densité d'énergie spectrale

$$u_\lambda(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5\left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1\right)}$$

u_λ max correspond à $1/u_\lambda$ min, soit si on pose $\frac{hc}{kT} = a$

$$\frac{1}{8\pi hc}\frac{d}{d\lambda}\left(\lambda^5\left(e^{\frac{a}{\lambda}} - 1\right)\right) = 0 \rightarrow 5\lambda^4\left(e^{\frac{a}{\lambda}} - 1\right) + \lambda^5\left(-\frac{a}{\lambda^2}\right)e^{a/\lambda} = 0$$

soit $5\lambda\,(e^{a/\lambda}-1) - a\,e^{a/\lambda} = 0$

$$5(1-e^{-a/\lambda}) - \frac{a}{\lambda} = 0$$

solution $\frac{a}{\lambda} = 4,965$

donc $\frac{hc}{kT\lambda} = 4,965$ $\qquad \underset{\substack{\uparrow \\ \lambda_{max}}}{\lambda} \cdot T = \frac{hc}{4,965\,k}$

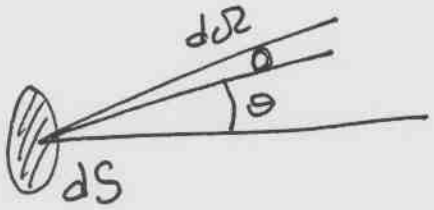
$h = 6,626.10^{-34}$ J.s , $c = 3.10^{8}$ m/s , $k = 1,381.10^{-23}$ J/K

$$\lambda_{max} \cdot T = 2,8991.\,10^{-3}\ \text{SI}$$

b) soleil $\overline{T} = 5770\,K \longrightarrow \lambda_{max} = 5,02\,10^{-7}\,m$

3 Rayonnement d'une surface noire

Il faut se souvenir ou connaître les bases de la photométrie avec la luminance L

a) 

$\underset{\text{flux émis par dS}}{d^2\phi} = L\, dS \cos\theta\, d\phi$

b) puissance totale rayonnée par une surface S
Il nous faut connaître L en fonction des éléments tel u_λ ou u_ω. Il est question de tous les λ ou ω, donc calculons

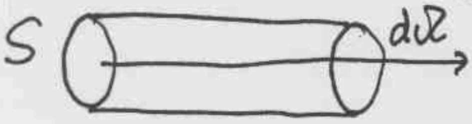
$$u\ (J.m^{-3}) = \int_0^\infty u_\omega\, d\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\int_0^\infty \frac{\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}\, d\omega$$

on pose $a = \frac{\hbar\omega}{kT}$, $da = \frac{\hbar}{kT}\, d\omega$

$$u = \frac{k^3T^3}{\hbar^3}\,\frac{kT}{\cancel{\hbar}}\,\frac{\cancel{\hbar}}{\pi^2c^3}\underbrace{\int_0^\infty \frac{a^3}{e^a-1}\,da}_{\pi^4/15} = \frac{k^4\pi^2}{15\,\hbar^3c^3}\,T^4$$

$u = \sigma T^4$
loi de Stephan

relions L et u



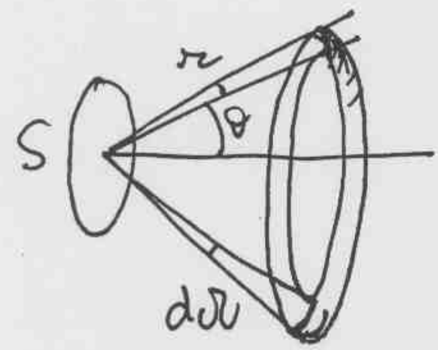
pour une direction de propagation

$$du = \frac{L \ S \ \cos\theta (=1) \ d\Omega \ \Delta t}{S \ c \ \Delta t}$$

$$du = \frac{L \, d\Omega}{c}$$ donc, pour $u = \int du$ toutes directions de propagation

$$u = \frac{4\pi L}{c}$$

puissance totale rayonnée par la surface



$$d\phi = L S \, d\Omega \, \cos\theta$$

$$\phi = LS \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, \frac{r \, d\theta \, 2\pi r \sin\theta}{r^2}$$

$$\phi = LS \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} 2\pi = \frac{LS}{2} 2\pi$$

$$\phi = \frac{S}{2} \frac{2\pi u c}{4\pi} = \frac{S u c}{4} = \frac{S \ c}{4} \sigma T^4$$

$$\phi = \sigma_R S T^4 \quad \text{avec} \quad \sigma_R = \frac{c\sigma}{4}$$

4 <u>Rayonnement du soleil et des planètes</u>

a) $\phi_{\text{total Soleil}} = \frac{c\sigma}{4} \cdot 4\pi R_s^2 T^4$, $R_s = 7 \cdot 10^5$ km

$\phi_{\text{total soleil}} \Rightarrow 4,5 \cdot 10^{26}$ Watts

b) puissance par unité de surface = éclairement $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E} = \frac{\phi_{t\,sol}}{4\pi D_{ts}^2} = \frac{4,3 \cdot 10^{26}}{4\pi (1,8 \cdot 10^{11})^2} = 1,1 \cdot 10^{3} \ \text{W/m}^2$$

c) puissance reçue par la terre par unité de surface (hypothèse du corps noir)

$$(S=1) \ \frac{c\sigma}{4} T_t^4 = \frac{1}{4\pi D_{ts}^2} \frac{c\sigma}{4} 4\pi R_s^2 T_s^4$$

d'où $T_t^4 = \frac{R_s^2}{D_{ts}^2} T_s^4 \longrightarrow T_t \hat{=} 407 \ K$

TD 3
Effet Compton - Laser

1- Effet Compton

a) Un photon d'énergie 10^6 eV entre en collision avec un électron au repos. Retrouver l'expression de la variation de la longueur d'onde du photon en fonction de l'angle de diffusion θ, en considérant que l'électron est relativiste. (Indication: On exprimera la conservation de l'énergie totale et de la quantité de mouvement).

b) Dans le cas $\theta=\pi$, quelles sont les valeurs de λ et λ', longueurs d'onde initiale et finale du photon, ainsi que l'énergie cinétique et la vitesse de l'électron après le choc?

2 - Laser

Soit un système à deux niveaux d'énergie E_2 et E_1 avec $E_2 - E_1 = 2\,eV$ qui travaille à 300 K. On appelle A la probabilité par atome et par seconde d'avoir une émission spontanée de E_2 à E_1. La probabilité d'une émission stimulée (de 2 à 1) et d'une absorption (de 1 à 2) sont les mêmes. Cette probabilité est proportionnelle à l'intensité du rayonnement extérieur fourni $B u_\nu$ avec B constante.

a) Que vaut le rapport des populations des deux niveaux N_2/N_1 à l'équilibre thermodynamique sans excitation extérieure?

b) On fournit un rayonnement extérieur très intense, donc on a $B u_\nu >> A$. Est-il possible d'obtenir une population N_2 supérieure à N_1? Que se passe-t-il au bout d'un temps assez long? Quelle est la caractéristique du matériau?

c) Si on désire réaliser un laser que faut-il faire concernant les populations des deux niveaux?

1. calcul relativiste Compton

a)

$$h\nu + m_0c^2 = h\nu' + mc^2 = h\nu' + m_0\gamma c^2$$

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c}\cos\theta + p\cos\varphi$$

$$0 = \frac{h\nu'}{c}\sin\theta - p\sin\varphi$$

$$2h^2\nu\nu'(1-\cos\theta) = p^2c^2 - m_0^2c^4(\gamma-1)^2$$

$$\left(m_0 c^2(\gamma-1) = h(\nu-\nu') \right)$$

$$2h^2\nu\nu'(1-\cos\theta) = m^2c^4 - m_0^2c^4 - m_0^2c^4(\gamma-1)^2$$

$$= \cancel{m_0^2\gamma^2c^4} - m_0^2c^4 - \cancel{m_0^2c^4\gamma^2} - m_0^2c^4 + 2m_0^2c^4\gamma$$

$$= 2m_0^2c^4(\gamma-1)$$

$$= 2m_0c^2 \cdot m_0c^2(\gamma-1)$$

$$= 2m_0c^2\, h(\nu-\nu')$$

$$\left(\Delta\lambda_\theta = c\,\frac{\nu-\nu'}{\nu\nu'} \right)$$

donc

$$\boxed{\Delta\lambda_\theta = \frac{h}{m_0c}(1-\cos\theta)}$$

qui est la relation déja obtenue mais cette fois sans aucune approximation

b) $E = h\nu \qquad \nu = \frac{1,6.10^{-13}}{6,626.10^{-34}} = 2,4.10^{20}\ Hz$

d'où λ avant le choc $= \frac{c}{\nu} = \frac{3.10^8}{2,4.10^{20}} = 1,25.10^{-12}\ m$

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\frac{h}{m_0c} = 2\times 2,426.10^{-12}$$

d'où $\lambda' = \Delta\lambda + \lambda = 6,1\ 10^{-12}\ m = 0,06\ Å$

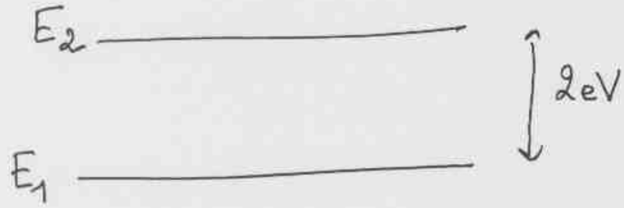
$$h(\nu-\nu') = mc^2 - m_0c^2 = m_0(\gamma-1)c^2 = E_c = h(2,4-0,49).10^{20}$$

$$E_c = 6,626.10^{-34}.1,91.10^{20} = 12,656.10^{-14}\ J = 0,79.\ MeV$$

$$\gamma - 1 = \frac{E_c}{m_0c^2} = \frac{0,79}{0,511} = 1,546 \qquad \gamma^2 = 2,39 \qquad \beta^2 = 0,58$$

$$v = c\beta = 2,29\ 10^8\ m/s$$

2. Laser



a) le rapport des populations est obtenu en utilisant la formule de Boltzmann. le nombre d'états à l'énergie E_i est

$$N_i = N\, e^{-E_i/kT}$$

avec $\sum N_i = N$

$$\text{donc} \quad \frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{E_2-E_1}{kT}} = 2{,}85 \cdot 10^{-34}$$

b) Ecrivons l'équation donnant la population sur le niveau 2 par exemple :

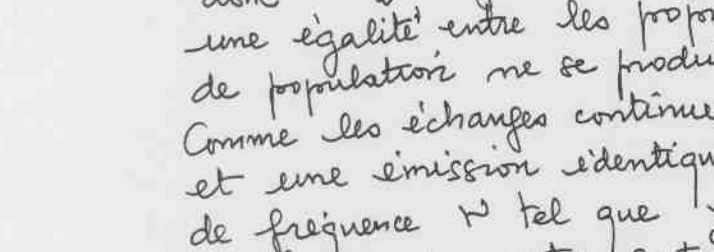
$$\frac{dN_2}{dt} = -AN_2 + B\,u_\nu N_1 - B u_\nu N_2 = B u_\nu (N_1 - N_2) - AN_2 = -\frac{dN_1}{dt}$$

si $B u_\nu \gg A$, on a

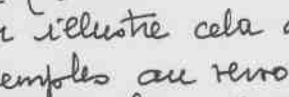
$$\frac{dN_2}{dt} = B u_\nu (N_1 - N_2) > 0 \quad \text{à cause de a)}$$

donc N_2 augmente jusqu'à ce que $N_1 - N_2 = 0$, c'est-à-dire une égalité entre les populations des 2 niveaux. L'inversion de population ne se produit pas naturellement.
Comme les échanges continuent à exister, on a une absorption et une émission identiques. Cela signifie que le rayonnement de fréquence ν tel que $h\nu = E_2 - E_1$ qui est envoyé de l'extérieur sur notre système matériau, ressort totalement : le corps est parfaitement transparent à la fréquence ν

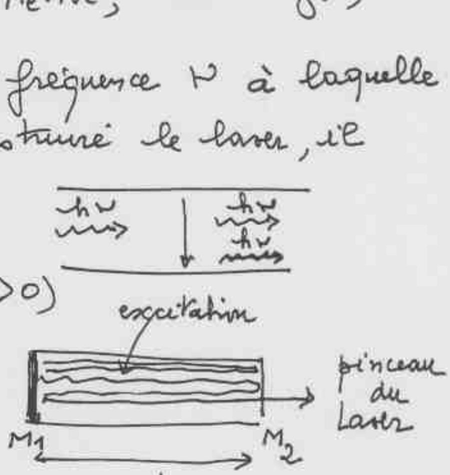
c) si on désire réaliser un laser, il faut avec un processus qui permet une inversion de population = dans tous les cas un process doit alimenter E_2 assez massivement et E_1 doit se vider encore plus vite (durée de vie τ de E_1 petite). On illustre cela dans les feuilles d'exemples au verso de l'énoncé (laser He-Ne, laser argon)



Avec un tel matériau on aura donc une fréquence ν à laquelle l'émission sera aisée si $N_2 > N_1$. Pour construire le laser, il faudra que l'émission stimulée soit importante = une onde se propageant dans le milieu vera son flux s'accroître (gain > 0)



On terminera le laser en constituant une cavité résonante de longueur adaptée $L = n\frac{\lambda}{2}$ limitée par un miroir "parfait M_1 et un miroir semi-transparent M_2



Licence de Physique et Chimie L3

TD 4

1 - Le satellite de Bohr

Un satellite de 10 kg tourne autour de la Terre avec une période de deux heures. Son orbite a un rayon de 8000 km.
a) En appliquant le postulat de Bohr sur la quantification du moment cinétique comme on le fait pour un électron dans l'atome d'hydrogène, trouver le nombre quantique associé à l'orbite du satellite.
b) Montrer à partir du postulat de Bohr et de la loi de la gravitation que le rayon d'une orbite est proportionnel au carré du nombre quantique: $r = kn^2$, où k est la constante de proportionnalité.
c) Trouver la distance séparant deux orbites voisines. Commenter.
d) Quels seraient les résultats d'un traitement classique de ce problème?

2 - L'atome de Bohr

On se place dans le cadre du modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène.
a) Calculer l'énergie cinétique T_n et l'énergie potentielle V_n de l'électron en fonction du nombre quantique n et du Rydberg R.
b) Calculer la fréquence ν_n du mouvement circulaire des électrons ainsi que leur vitesse v_n.
Exprimer v_n/c en fonction de n et de la constante de structure fine $\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$.

3 - Décalage de raies entre les spectres de H et He^+

a) Dans le spectre de l'atome d'hydrogène, on trouve une raie de longueur d'onde $\lambda = 4101{,}0$ Å. A quelle transition n -> m correspond-elle?
b) Montrer que le spectre de l'hélium ionisé He^+ (Z=2 - A=4) contient une raie très voisine de la précédente, de longueur d'onde λ'. A quelle transition correspond-elle?
c) Calculer la différence $\lambda-\lambda'$ à 0,1 Å près et donner λ'.

Données: On considèrera
masse du proton = masse du neutron = M
masse de l'électron = m_e
$M = 1836\ m_e$
$G = 6.67\ 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}$

1 Satellite de Bohr

a) on sait que $\sigma = rmv = n\hbar$

$r = 8.10^6 m$, $m = 10 kg$, $v = r\frac{2\pi}{T} = \frac{16\pi 10^6}{7200} = 6{,}98.10^3$ m/s

$\hbar = 1{,}0545 . 10^{-34} Js$

d'où $n = \frac{rmv}{\hbar} = 5{,}3.10^{45}$ $(5{,}298 . 10^{45})$

b)

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad (a)$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r} \quad (b)$$

$$\sigma = rmv = n\hbar \quad (c)$$

$G =$

(a) et (c) $\frac{GM}{r} = v^2 = \frac{n^2\hbar^2}{r^2 m^2} \longrightarrow r = n^2\frac{\hbar^2}{GMm^2}$

$r = kn^2$ avec $k = \frac{1{,}112 . 10^{-68}}{6{,}67.10^{-11}\ 5{,}98.10^{24}\ 10^2}$

$(G = 6{,}67 . 10^{-11}$ SI, $M = 5{,}98 . 10^{24} kg)$

$k = 2{,}7879 . 10^{-85}$

recalculons n pour $r = 8.10^6 m$ $\quad n = \left[\frac{8.10^6}{2{,}7879\,10^{-85}}\right]^{1/2}$

on trouve, avec la précision (faible) de ce calcul

$n = 5{,}36 . 10^{45}$ $(5{,}357 . 10^{45})$

c) $r_{n+1} - r_n = k\left((n+1)^2 - n^2\right) = (2n+1)k$

comme $n \gg 1$ $\quad \Delta r_n = 2nk = 5{,}57\,10^{-85} n$.

$\Delta r_n \cong 3.10^{-39}$ mètres !!

d) un traitement classique aurait supposé une loi continue, une variation continue de r = on voit que nous y sommes = la mécanique quantique supposerait que l'on sache détecter une variation de distance à 3.10^{-29} Å près !

2 Atome de Bohr (sans correction d'entraînement)

a)

énergie cinétique T_n

$$\sigma = r m v$$

$$T_n = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \frac{\sigma^2}{m^2 r^2}$$

avec $r = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 \sigma^2}{m e^2}$

$$T_n = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{m r^2} = \frac{\sigma^2}{2m} \frac{m^2 e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 \sigma^4} = \frac{m e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$T_n = \frac{R_H}{n^2}$$

énergie potentielle $V_n = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{e^2}{r} = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{m e^2}{4\pi\varepsilon_0 n^2 \hbar^2}$

$$V_n = -2 \frac{m e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 2\hbar^2} \frac{1}{n^2} = -2 \frac{R_H}{n^2}$$

b) on a $v = 2\pi r \nu$ et $v = \dfrac{n\hbar}{m r}$

$$2\pi r \nu = \frac{n\hbar}{m r}$$

$$\nu = \frac{n\hbar}{2\pi m r^2} = \frac{n\hbar}{2\pi \cancel{m}} \cdot \frac{m^{\cancel{2}} e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 n^4 \hbar^4}$$

$$\nu_n = \left(\frac{m e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 2\hbar^2}\right) \frac{1}{\pi\hbar} \cdot \frac{1}{n^3} = R_H \frac{1}{\pi\hbar} \cdot \frac{1}{n^3}$$

$$v_n = 2\pi r \nu = \cancel{2\pi} \frac{4\pi\varepsilon_0 n^2 \hbar^2}{\cancel{m} e^2} \cdot \frac{\cancel{m} e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 \cancel{2} \hbar^2} \cdot \frac{1}{\cancel{\pi}\hbar} \cdot \frac{1}{n^3}$$

$$v_n = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar} \frac{1}{n}$$

$$\frac{v_n}{c} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} \frac{1}{n} = \frac{\alpha}{n} = \frac{1}{137} \cdot \frac{1}{n}$$

3 <u>Décalage des raies entre H et He^+</u>

$$r_{nH} = \left(1+\frac{m}{M}\right)a_0 n^2 \quad = (\quad)\, a_0 \frac{n^2}{Z}$$

$$E_{nH} = -\frac{R_H}{\left(1+\frac{m}{M}\right)}\frac{1}{n^2} \quad = (\quad)\, R_H \frac{Z^2}{n^2}$$

$$\nu_{nm\,H} = \frac{R_H}{h}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right)\frac{1}{1+\frac{m}{M}}$$

$$a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{me^2} = 0{,}529\ \text{Å}$$

$$R_H = \frac{me^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 2\hbar^2} = 13{,}606\ \text{eV}$$

He

$$r_{nHe} = \left(1+\frac{m}{4M}\right)a_0\frac{n^2}{2}$$

$$E_{nHe} = -\frac{R_H}{\left(1+\frac{m}{4M}\right)}\frac{4}{n^2}$$

a) raie H de $\lambda = 4101{,}0$ Å

$$\lambda_{nmH} = \frac{c}{\nu_{nmH}} = \left(1+\frac{m}{M}\right)\frac{ch}{R_H}\frac{n^2m^2}{m^2-n^2} = \frac{1837}{1836}\frac{3.10^8\ 6{,}626.10^{-34}}{13{,}606.1{,}6.10^{-19}}\frac{n^2m^2}{m^2-n^2}$$

$$4101{,}0.10^{-10} = 0{,}91246\ .10^{-7}\frac{n^2m^2}{m^2-n^2}$$

$$\frac{n^2m^2}{m^2-n^2} = 4{,}494 \simeq 4{,}5 \qquad m^2 > n^2$$

si on prend $m = 6, n = 2$ $\quad \frac{4.36}{32} = 4{,}5$ ok

b) $$\lambda_{n'm'He} = \frac{c}{\nu_{n'm'He}} = \left(1+\frac{m}{4M}\right)\frac{c\,h}{4R_H}\frac{n'^2m'^2}{m'^2-n'^2} = \frac{7345}{7344}\frac{1}{4}(\text{idem})\frac{n'^2m'^2}{m'^2-n'^2}$$

on a environ $\frac{1}{4}\frac{n'^2m'^2}{m'^2-n'^2} = \frac{n^2m^2}{m^2-n^2}$ OK si $m' = 2m$, $n' = 2n$

c) $(\lambda_H - \lambda'_{He})$? on a

$$\frac{\lambda'_{He}}{\lambda_H} = \frac{1+\frac{m}{4M}}{1+\frac{m}{M}} \# \left(1+\frac{m}{4M}\right)\left(1-\frac{m}{M}\right)$$

$$\# \ 1 - \frac{m}{M} + \frac{m}{4M} - \frac{m^2}{4M^2} \# \ 1 - \frac{3m}{4M}$$

$$\lambda - \lambda' = \lambda - \lambda\left(1-\frac{3m}{4M}\right) = \frac{3m}{4M}\lambda = 4.10^{-4} \times 4101{,}0$$

$\Delta\lambda = 1{,}67$ A° (vérification $\frac{m^2}{4M^2} \sim 7.10^{-8}$)

$\Delta\lambda = 1{,}7$ A° $\pm$ 0,1 Å

$\Rightarrow \lambda'_{m'n'He} = 4099{,}3 \pm 0{,}1$ Å

TD 5
Diffraction

1- Ordres de grandeur des longueurs d'onde de de Broglie

Pour chacune des particules suivantes se déplaçant selon l'axe x, calculer l'énergie E, la longueur d'onde de de Broglie λ ainsi que la vitesse de la particule (qui est égale à la vitesse de groupe de l'onde) et la vitesse de phase de l'onde.
a) Une masse de 1 gramme se déplaçant à la vitesse de 1m/s.
b) Un électron d'énergie cinétique 200 eV.
c) Un électron de l'ESRF d'énergie cinétique 6 GeV
d) Un proton d'énergie cinétique 200 eV
e) Un neutron de l'ILL de vitesse 5 m/s

2- Diffraction d'électrons - Expérience de Davisson et Germer

On envoie un faisceau d'électrons d'énergie 100 eV sur un cristal de Nickel dans un montage du type "Davisson et Germer". Les positions angulaires du premier et du second maximum de diffraction sont $\theta = 16{,}57°$ et $\theta = 34{,}77°$.
En déduire l'espacement d des plans atomiques du cristal.

3- Vitesses de phase et de groupe

a) On considère une onde progressive à une dimension de la forme $\Psi(x,t) = \Psi_0\cos(kx-\omega t)$.
Quelle est la vitesse de phase de cette onde?

b) On considère à présent la superposition de deux ondes de vecteurs d'onde k_1 et k_2 voisins (Δk petit devant k_1 et k_2):

$$\Psi(x,t) = \Psi_0\cos(k_1x-\omega_1t) + \Psi_0\cos(k_2x-\omega_2t).$$

En exprimant $\Psi(x,t)$ sous la forme d'un produit de fonctions cosinus, définir la vitesse moyenne de phase et la vitesse de groupe.

4- Paquet d'ondes

On considère un paquet d'ondes à une dimension, formé par la superposition des ondes monochromatiques

$$\Psi_0\exp(-i(\omega t-kx)) \qquad \text{(en représentation imaginaire)}$$

pour lesquelles les valeurs de k sont limitées, autour de k_0, à un intervalle $[k_0-a/2, k_0+a/2]$ avec $a \ll k_0$.
a) Ecrire l'expression du paquet d'ondes.

b) Développer, au premier ordre, la pulsation ω en fonction du vecteur d'onde k, au voisinage de ω_0 correspondant à k_0.

c) Calculer l'expression du paquet d'ondes en utilisant ce développement limité au premier ordre.

5 - Interprétation ondulatoire du principe d'incertitude

On considère une onde de de Broglie qui se propage suivant Ox, et est limitée à un intervalle [-a,a] à un instant donné t=0. Donc à cet instant, en laissant tomber la constante multiplicative, la fonction d'onde s'écrit:

$$\Psi(x) = \exp(ik_o x) \text{ pour } |x|<a$$
$$= 0 \text{ pour } |x|>a$$

a) Quelle est l'incertitude Δx sur la mesure de la position x de la particule dans cet état?

b) On désire déterminer l'incertitude Δp sur la quantité de mouvement p. Pour cela on cherche à exprimer $\Psi(x)$ sous la forme d'un paquet d'onde résultant de la superposition d'ondes monochromatiques exp(ikx). Cette décomposition s'effectue en utilisant la transformée de Fourier:

$$\Psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} a(k)e^{ikx}dk$$

Déterminer la fonction a(k).

c) Représenter a(k) en fonction de k. a(k) peut être considérée comme nulle à l'extérieur d'un intervalle $[-K_0,K_0]$. Préciser la valeur de K_0.

d) En déduire l'incertitude Δp sur la quantité de mouvement de la particule et calculer le produit $\Delta x \Delta p$.

6 - Stabilité de l'atome d'hydrogène

Le problème qui se pose ici est celui de la stabilité de l'atome d'hydrogène.
En mécanique classique, l'énergie d'un tel système (énergie cinétique et énergie coulombienne) est d'autant plus faible que r et p sont petits. Pourtant, nous savons que l'électron ne s'effondre pas sur le noyau.

Nous allons considérer que r et p, qu'en mécanique classique nous ferions tendre vers zéro, peuvent être assimilés à Δr et Δp.
A partir de l'expression de l'énergie de l'atome et de la relation d'incertitude qui lie r et p, trouver la distance d'équilibre noyau-électron.

Energie $E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$

1) $\lambda = \frac{h}{m_0 v} = \frac{h}{p}$

classique

$\lambda = \frac{h}{m_0 v}$

relativiste

$\lambda = \frac{hc}{\left[E_c(E_c+2m_0c^2)\right]^{1/2}}$

$v = \left[\frac{2E_c}{m_0}\right]^{1/2}$

$E_c = (\gamma-1)m_0c^2$

$\gamma = \frac{E_c}{m_0c^2} + 1 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

$v = c\left[\frac{\gamma^2-1}{\gamma^2}\right]^{1/2}$

$V = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar\omega}{\hbar k} = \frac{E_c}{p} = \frac{v}{2}$

$V = \frac{c^2}{v}$

a) $E = E_c = \frac{1}{2}m_0v^2 = 5.10^{-4}\,J = 3{,}125 \cdot 10^{15}\,eV$

$(m_0c^2 = 5{,}625 . 10^{32}\,eV = 9 \cdot 10^{13}\,J)$

$\lambda = \frac{h}{[2mE_c]^{1/2}} = 6{,}63 . 10^{-31}\,m$

$v = 1\,m/s$

$V = 0{,}5\,m/s$

b) $E_c = 200\,eV = 3{,}2 . 10^{-17}\,J \quad (m_0c^2 = 0{,}512 . 10^6\,eV)$

$\lambda = 0{,}868\,\mathring{A} = \frac{h}{[2mE_c]^{1/2}}$

$v = \left[\frac{2E_c}{m}\right]^{1/2} = 8{,}39 . 10^6\,m/s$

$V = \frac{v}{2} = 4{,}195 . 10^6\,m/s$

c) $E = E_c + m_0c^2 = 6.10^9 + 0{,}512.10^6\,eV = 9{,}6 . 10^{-10}\,J$

$\lambda = \frac{hc}{\left[E_c(E_c+2m_0c^2)\right]^{1/2}} \# \frac{6{,}626 . 10^{-34} . 3.10^8}{6.10^9 . 1{,}6 . 10^{-19}} = 2{,}07 . 10^{-16}\,m$

$\gamma = \frac{6.10^9}{0{,}512.10^6} + 1 = 11719$

$v = c\left[1 - \frac{1}{\gamma^2}\right]^{1/2} \# c\left(1 - \frac{1}{2\gamma^2}\right)$

$v = c(1 - 4.10^{-8})$ = c n'est pas assez précis

$V = c(1 + 4.10^{-8})$

d) $E = 200\ eV + M_0 c^2$ $\qquad M_0 c^2 = 1{,}672 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16}$

$E_c = 3{,}2 \cdot 10^{-17}\ j$ $\qquad = 1{,}5.048 \cdot 10^{-10}\ J$

$$v = \left[\frac{2E_c}{M_0}\right]^{\frac{1}{2}} = \left(4{,}25 \cdot 10^{-7}\right)^{1/2} = 6{,}52 \cdot 10^{-4}\ m/s$$

$$\lambda = \frac{h}{M_0 V} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}}{1{,}672 \cdot 10^{-17}\ 6{,}52 \cdot 10^{-4}} = 0{,}608 \cdot 10^{-13} = 6{,}08 \cdot 10^{-14}\ m$$

$$V = v/2 = 3{,}26 \cdot 10^{-4}\ m/s$$

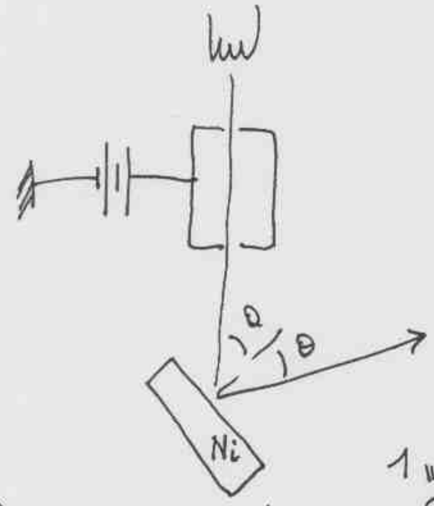
e) $v = 5\ m/s$ $\qquad E_c = \frac{M_0 v^2}{2} = \frac{1{,}672 \cdot 10^{-27} \cdot (6{,}52 \cdot 10^{-4})^2}{2}$

$E_c = 35{,}54\ 10^{-35} = 3{,}554 \cdot 10^{-34}\ J$

$V = \frac{v}{2}$

$$\lambda = \frac{h}{M_0 v} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}}{1{,}672 \cdot 10^{-27} \cdot 5} = 0{,}792 \cdot 10^{-7} = 7{,}92 \cdot 10^{-8}\ m$$

2



$$2d \sin\theta = n\lambda$$

$$E = \frac{hc}{\lambda} \quad , \quad \lambda = \frac{hc}{E}$$

$$\lambda = \frac{6{,}626\ 10^{-34} . 3.10^{8}}{100 . 1{,}6 . 10^{-19}} = 12{,}42 . 10^{-9}$$
$$= 1{,}242.10^{-8}\ m$$

$$\theta_1 \longrightarrow d_1 = \frac{\overset{1}{n}\lambda}{2\sin\theta_1} = \frac{1{,}242.10^{-8}}{2 . 0{,}28518} = 2{,}17752\ 10^{-8}\ m$$

$$\theta_2 \longrightarrow d_2 = \frac{2 . \lambda}{2\sin\theta_2} = \frac{1{,}242.10^{-8}}{0{,}57028} = 2{,}17786 . 10^{-8}\ m$$

donc $d = 2{,}1777 \pm 0{,}0002\ \mathring{A}$

3 a) la vitesse de phase est la vitesse de propagation d'un front d'onde, d'une région (surface) à phase constante

$(kx - \omega t) = $ cte,

$kx - \omega t = $ cte $\quad k\frac{dx}{dt} - \omega = 0 \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = V$

b) $$\psi_0 \cos(k_1 x - \omega_1 t) + \psi_0 \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$
$$= 2\psi_0 \cos\left\{\frac{(k_1+k_2)}{2}x - \frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t\right\} \cos\left\{\frac{k_1-k_2}{2}x - \frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right\}$$

vitesse moyenne de phase $\quad \omega_1 + \omega_2 / k_1 + k_2 = \overline{V}$

vitesse de groupe $v_g = \omega_1 - \omega_2 / k_1 - k_2$

4 ondes de type $\psi_0\, e^{-i(\omega t - kx)}$ avec $k_0 - a/_2 < k < k_0 + a/_2$ et $a \ll k_0$

a) $$\psi(x,t) = \psi_0 \int_{k_0 - a/2}^{k_0 + a/2} e^{-i(\omega t - kx)}\, dk$$

b) $$\omega = \omega_0 + \left.\frac{\partial\omega}{\partial k}\right)_{k=k_0} dk = \omega_0 + v_g (k - k_0)$$

$$\psi(x,t) = \psi_0 \int_{k_0 - a/2}^{k_0 + a/2} e^{-i(\omega_0 t + v_g k t - v_g k_0 t - kx)}\, dk$$

$= k - k_0 + k_0$

$$\Psi(x,t) = \Psi_0 \, e^{-i(\omega_0 t - k_0 x)} \int_{k_0 - a/2}^{k_0 + a/2} e^{-i\left(v_g (k-k_0)t - (k-k_0)x\right)} dk$$

$$\Psi(x,t) = \Psi_0 \, e^{-i(\omega_0 t - k_0 x)} \left[\frac{e^{i(v_g t - x)k'}}{i(v_g t - x)} \right]_{-a/2}^{+a/2} \qquad \begin{array}{l} k - k_0 = k' \\ dk = dk' \end{array}$$

$$\Psi(x,t) = \Psi_0 e^{-i(\omega_0 t - k_0 x)} \, 2\frac{a}{2} \; \frac{e^{i(v_g t - x)a/2} - e^{-i(v_g t - x)a/2}}{2i(v_g t - x)\frac{a}{2}}$$

$$\Psi(x,t) = a\Psi_0 \underbrace{e^{-i(\omega_0 t - k_0 x)}}_{\substack{\text{propagation à} \\ \text{la vitesse } \frac{\omega_0}{k_0} \\ \text{"onde porteuse"}}} \left(\frac{\sin(v_g t - x)\frac{a}{2}}{(v_g t - x)\frac{a}{2}} \right)$$

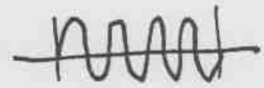
fonction d'amplitude qui se propage à la vitesse v_g

$$v_g = \frac{\omega - \omega_0}{k - k_0}$$

5

a) $\Psi(x) = e^{i k_0 x}$ si $|x| < a$

$ = 0$ si $|x| > a$



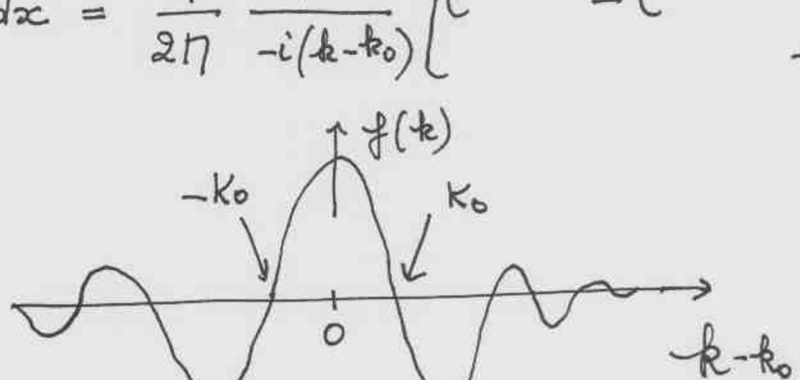
$\Delta x = a$

b) $$\Psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(k)\, e^{ikx} dk$$

d'où $$f(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{+a} \Psi(x)\, e^{-ikx} dx$$

$$f(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{+a} e^{ik_0 x} e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{-i(k-k_0)} \left[e^{-i(k-k_0)a} - e^{i(k-k_0)a} \right]$$

$$f(k) = \frac{a}{\pi} \frac{\sin (k-k_0)a}{(k-k_0)a}$$



c) $(k-k_0)a = \pi$

d) $k - k_0 = \frac{\pi}{a}$

$\Delta k = \frac{\pi}{a} \qquad \Delta p = \hbar \Delta k = \frac{h}{2\pi} \frac{\pi}{a} = \frac{h}{2a}$

$\Delta p . \Delta x \simeq \Delta p . a = \hbar$

6 on considère $M \gg m_0$

$\Delta r . \Delta p \sim \hbar$

et $E = \frac{\Delta p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \Delta r} = \frac{\hbar^2}{2m\,\Delta r^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \Delta r}$

en mécanique classique pour minimiser, on ferait tendre p (Δp) vers zero (pas d'energie cinetique) et Δr vers zero donc on aurait $E \sim -\infty$. Cherchons

$$\frac{dE}{d\Delta r} = 0 = \frac{-2\hbar^2}{2m\,\Delta r^3} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \Delta r^2}$$

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \Delta r^2} = \frac{\hbar^2}{m\,\Delta r^3} \longrightarrow \Delta r = \frac{\hbar^2\, 4\pi\varepsilon_0}{m e^2} = a_0 = 0{,}529\,\text{Å}$$

comme vu en cours si on remplace dans E, Δr par a_0 :

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{m^2 e^4}{(\hbar^2\, 4\pi\varepsilon_0)^2} - \frac{e^2\, m e^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2\, \hbar^2} = - \frac{m e^4}{2\hbar^2 (4\pi\varepsilon_0)^2}$$

c'est le Rydberg $R_H = 13{,}606$ eV