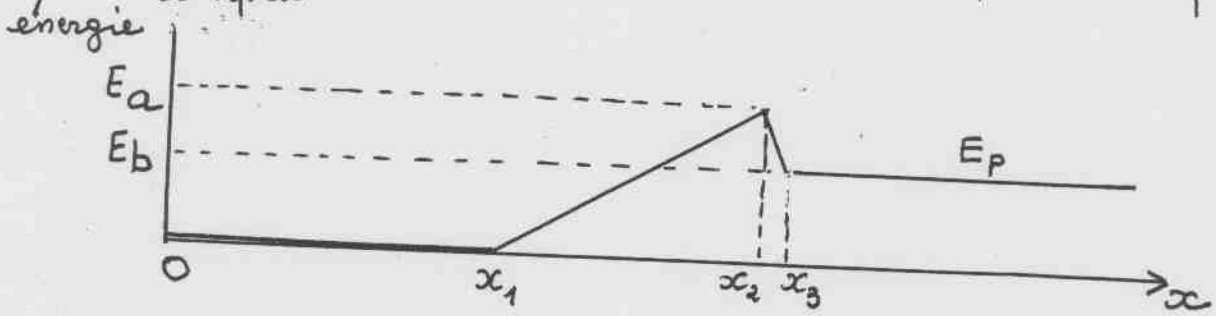
L3 Physique et Chimie

TD6

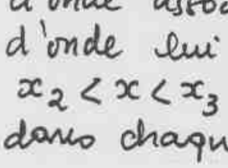
Propagation d'une particule-paquet d'onde à une dimension

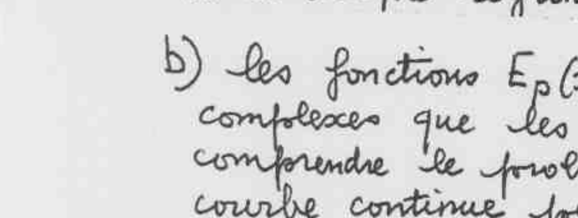
Considérons une particule non relativiste qui arrive de la gauche vers la droite dans le champ de potentiel représenté ci-après



a) L'énergie cinétique de la particule qui passe en $x = 0$ est W ($W > E_a > E_b$). Elle rencontre les variations d'énergie potentielle indiquée. Quelle forme peut être donnée à la fonction d'onde qui correspond au centre du paquet d'onde associé qui se déplace vers les $x > 0$? Quelle longueur d'onde lui associer dans les régions ($x \leq x_1$, $x_1 < x < x_2$, $x_2 < x < x_3$ et $x > x_3$) ? Ecrire la relation définissant λ dans chaque région et tracer qualitativement $\lambda(x)$.

b) les fonctions $E_p(x)$ peuvent physiquement être plus complexes que les variations linéaires choisies ici. Pour comprendre le problème nous allons le décomposer. Toute courbe continue peut être approximée par une suite d'escaliers dont on fait tendre la taille vers zéro. Donc l'étude d'une marche est intéressante.





Soit un jet de particules qui se déplace de la gauche vers la droite avec l'énergie W. Les particules rencontrent en $x = 0$ une marche de potentiel U ($U < W$). Ecrire dans les deux régions les fonctions d'onde qui rendront compte des situations en $x < 0$ (I) et $x > 0$ (II). Donner les λ correspondants

c) En utilisant les conditions de continuité sur $\Psi(x)$ et $\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x)$, définir les amplitudes des fonctions d'onde du paquet réfléchi A et du paquet transmis B, celle de l'onde incidente étant prise égale à l'unité

d) Vérifier la pertinence de ces résultats en écrivant la conservation du flux de particules = il ne peut pas dans notre cas avoir création ou disparition de particules, par exemple en $x = 0$.

e) supposons que les particules étudiées soient des électrons initialement accélérés par une tension V_0 de 5.10^4 volts et que $\mathcal{V} = 15$ eV. Calculer le rapport du nombre d'électrons réfléchis et transmis (l'approximation classique est conservée)

f) Nous désirons représenter sur un schéma concernant la barrière $\mathcal{V}$, d'une part la fonction d'onde et d'autre part la longueur d'onde. Commençons par la longueur d'onde comme déjà réalisé en a) en traçant $\lambda(x)$.
En utilisant les résultats des questions précédentes, que peut-on affirmer en ce qui concerne les fonctions d'onde pour $x > 0$ et $x < 0$ et la probabilité de présence des particules?

TD6

a) on voit que l'on rencontre deux types de situations :
- les régions ($x < x_1$, $x > x_3$) dans lesquelles l'énergie potentielle ne dépend pas de x,
- celles (x compris entre x_1 et x_3) dans lesquelles E_p varie avec x.

Dans les premières, l'équation de Schrödinger des états stationnaires donne des solutions simples (on sait que $W > E_p$) :

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}(W - E_p)\,\Psi \qquad \Psi(x)$$

les solutions sont obligatoirement de type

$$\Psi(x) = C_1 e^{iK_1 x} + C_2 e^{-iK_1 x}$$

avec pour $x < x_1$ $\quad K_1 = \frac{[2m\,W]^{1/2}}{\hbar}$

pour $x > x_3$ $\quad K_4 = \frac{[2m(W - E_b)]^{1/2}}{\hbar}$

si $K = \frac{2\Pi}{\lambda}$, on trouve $\lambda_1 = \frac{2\Pi}{K_1} = \frac{h}{[2mW]^{1/2}}$

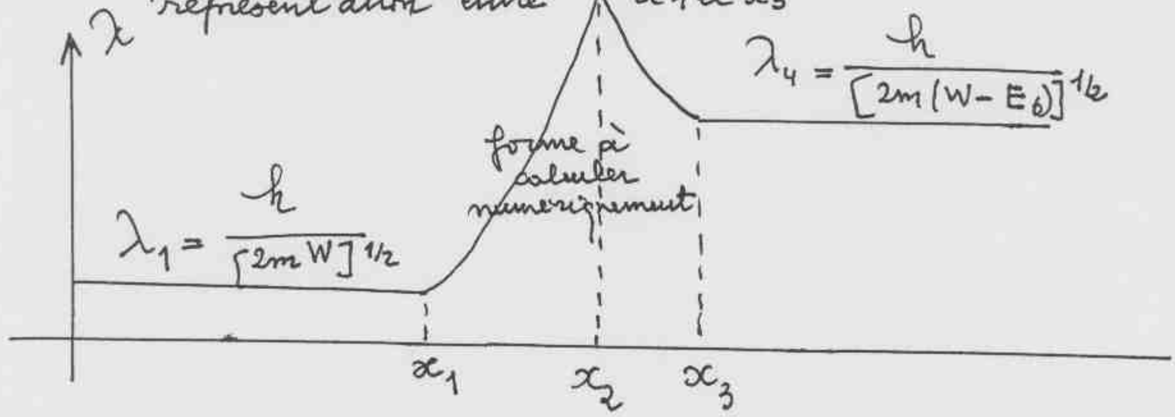
et $\lambda_4 = \frac{2\Pi}{K_4} = \frac{h}{[2m(W-E_b)]^{1/2}} > \lambda_1$

Dans les régions $x_1 < x < x_2$, E_p croît avec x, $W - E_p$ décroît quand x augmente jusqu'à la valeur $W - E_a$ minimale.
L'équation différentielle est plus délicate à résoudre analytiquement. C'est un bon exercice d'analyse numérique.

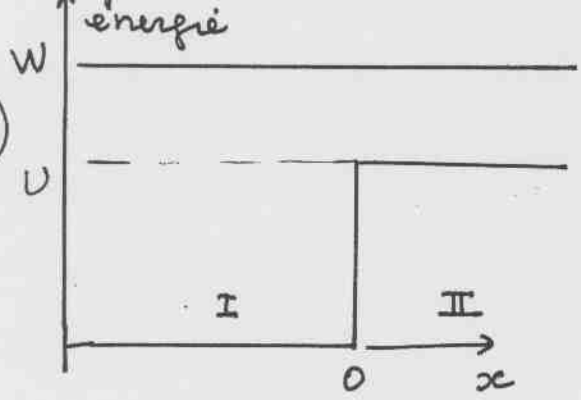
$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}\left(W - \frac{E_a(x - x_1)}{x_2 - x_1}\right)\Psi(x)$$

$$= -\frac{2m}{\hbar^2}\left(W + \frac{x_1}{x_2 - x_1}\right)\Psi(x) + \frac{2m}{\hbar^2}\frac{E_a}{x_2 - x_1}\,x\,\Psi(x)$$

On comprend intuitivement que de $x = x_1$ à $x = x_2$ λ va augmenter et, de même de $x = x_2$ à $x = x_3$ λ va décroître, d'où une représentation qualitative avec des incertitudes sur la représentation entre x_1 et x_3



mais une certitude, $\forall x$ $\quad \frac{d^2\Psi}{dx^2} = -(\text{terme} > 0)\,\Psi$
sinon nous n'aurions pas de propagation



b)

$$\Psi_{I}(x) = e^{2i\pi K_1 x} + A e^{-2\pi i K_1 x}$$

$$\Psi_{II}(x) = B e^{2\pi i K_2 x} + C e^{-2\pi i K_2 x}$$

on ne voit pas comment des particules reviendraient de $+\infty \Rightarrow C = 0$

et $K_1 = \dfrac{1}{\lambda_1} = \dfrac{[2mW]^{1/2}}{h}$, $K_2 = \dfrac{1}{\lambda_2} \dfrac{[2m(W-U)]^{1/2}}{h}$

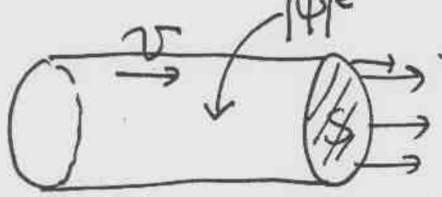
c) en $x = 0$

$$1 + A = B \quad \text{et } 2iK_1\pi(1-A) = 2\pi i K_2 B$$

$$K_1(1-A) = K_2(1+A) \Rightarrow A(K_2+K_1) = K_1 - K_2$$

$$A = \frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \quad \text{et} \quad B = \frac{2K_1}{K_1+K_2}$$

d)



le flux de particules sera nombre moyen de particules/u de vol × proba de présence × vS

soit $v . S \, N |\Psi|^2$ = nombre de particules traversant la surface S par seconde

la conservation du flux en $x = 0$ s'écrit

$$v_1 . 1 = v_1 A^2 + v_2 B^2$$

or $\lambda = \dfrac{h}{mv} = \dfrac{1}{K}$ d'où $v = K \dfrac{h}{m}$

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{K_2}{K_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

$$1 = \left|\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2}\right|^2 + \frac{K_2}{K_1}\frac{4K_1^2}{|K_1+K_2|^2} = \frac{K_1^2 + K_2^2 - 2K_1K_2 + 4K_1K_2}{(K_1+K_2)^2}$$

$1 = 1$ donc OK. les solutions conviennent

e) on a $A = \frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} = \frac{\sqrt{eV_0} - \sqrt{\quad (eV_0 - U)}}{\sqrt{eV_0} + \sqrt{2m(eV_0-U)}}$

et $B = \frac{2K_1}{K_1+K_2} = \frac{2\sqrt{eV_0}}{\sqrt{eV_0} + \sqrt{\quad (eV_0 - U)}}$

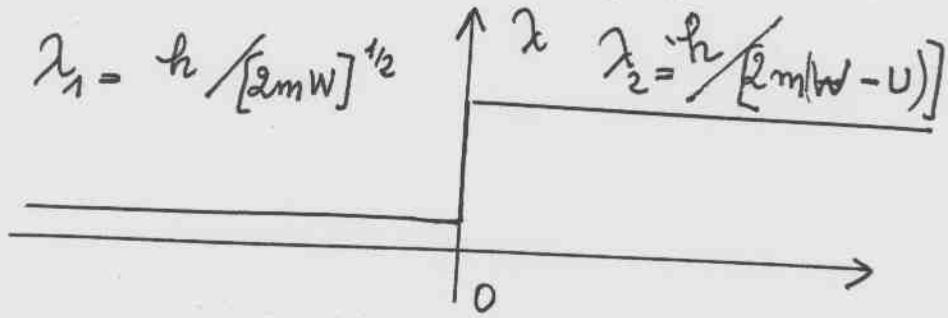
comme $15 eV \ll 5.10^4 eV$, on écrit

$$A = \frac{\sqrt{eV_0} - \sqrt{eV_0}\sqrt{1 - U/eV_0}}{\sqrt{eV_0} + \sqrt{eV_0}\sqrt{1 - U/eV_0}} \# \frac{1 - \left(1 - \frac{U}{2eV_0}\right)}{1 + \left(1 - \frac{U}{2eV_0}\right)} \# + \frac{U}{4eV_0}$$

on aura pour le rapport du nombre d'électrons réfléchis sur les électrons incidents

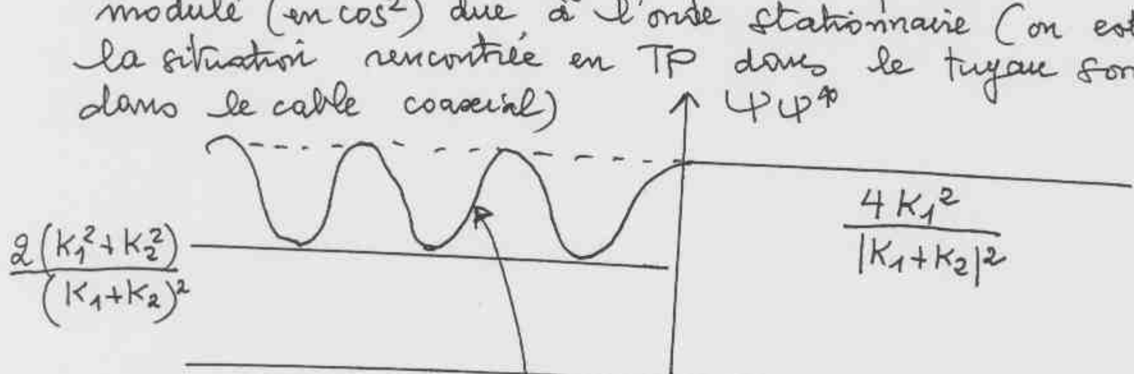
$$\frac{v_1 A^2}{v_1 1} = \frac{U^2}{16e^2V_0^2} = \frac{n_i}{n_r} = \frac{|\Psi_r|^2}{|\Psi_i|^2} = 5,6.10^{-9}$$

f) $\lambda_1 = h / [2mW]^{1/2}$ $\qquad \lambda_2 = h / [2m(W-U)]^{1/2}$



pour $x > 0$ la réponse est aisée = $\Psi_{II}(x)$ correspond à une onde progressive de la forme $\frac{2K_1}{K_1+K_2} e^{i2\pi K_2 x}$, donc la probabilité de présence des particules est la même quel que soit x
$\Psi_{II}\Psi_{II}^* = B^2 = \frac{4K_1^2}{(K_1+K_2)^2}$

pour $x < 0$ on peut écrire $\Psi_I(x)$ sous la forme (A est plus petit que 1)
$\Psi_I(x) = (1-A) e^{2i\pi K_1 x} + 2A \cos 2\pi K_1 x$
c'est-à dire la somme d'une onde progressive et d'une onde stationnaire. La probabilité de présence due à l'onde stationnaire est constante et s'ajoute à cette probabilité un terme modulé (en $\cos^2$) due à l'onde stationnaire (on est dans la situation rencontrée en TP dans le tuyau sonore ou/et dans le cable coaxial)



TD 7
Fonction d'onde - Equation de Schrödinger

1- Effet Tunnel

On considère la barrière de potentiel à une dimension définie par:

$V(x) = 0$ pour $x < 0$ (région I) et $x > a$ (région III)
$V(x)=V_0$ $(V_0 > 0)$pour $0 < x < a$ (région II)

Des particules de masse m et d'énergie E, issues d'une source située en $(-\infty)$, arrivent sur cette barrière.

1- Donner la forme de la fonction d'onde dans les différentes régions, ainsi que l'expression des coefficients de réflexion et de transmission de la barrière.

2- Application numérique
Calculer la valeur du coefficient de transmission pour
- un électron d'énergie 1 eV et une barrière d'énergie de largeur 1 Å et de hauteur 2 eV.
- un proton de même énergie arrivant sur la même barrière de potentiel
- un cycliste de 70 kg arrivant à 36 km/h sur une colline abrupte de 20m de haut et 50m de large.

2- Demi-puits de potentiel

On considère le puits de potentiel représenté sur la figure 1.
E et m sont l'énergie totale et la masse de la particule.

Nous nous plaçons dans le cas où $-B < E < 0$.
1) Donner la forme de la fonction d'onde dans les différentes régions.

2) Montrer que si $G = \dfrac{a^2 Bm}{\hbar^2}$ est inférieur à une certaine valeur G_0, il n'existe pas d'état lié.
Ce résultat est à comparer à celui obtenu dans le cas du puits symétrique à profondeur finie.

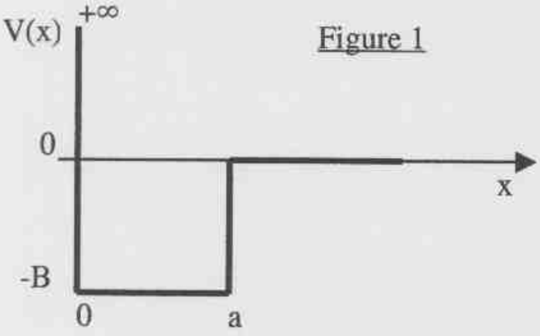
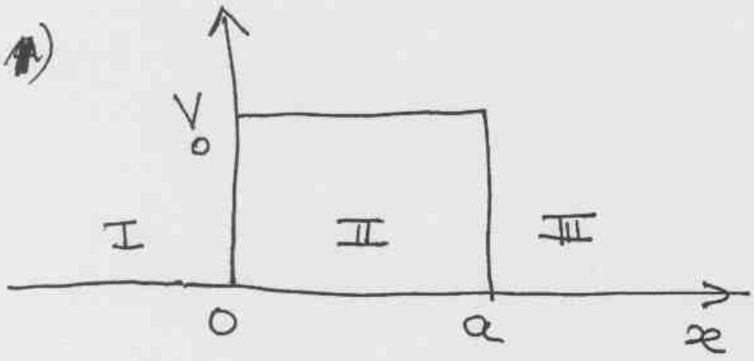


Figure 1

TD7 1

1)



$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E - E_p(x)\right]\psi(x) = 0$$

on étudie le cas ou $E > E_p(x) = V_0$

$$\Psi(x,t) = e^{-i\omega t} e^{ikx} = e^{-i\omega t}\psi(x)$$

$$\psi_1(x) = A_1^+ e^{ik_1 x} + A_1^- e^{-ik_1 x} \qquad k_1 = \frac{[2mE]^{1/2}}{\hbar}$$

$$\psi_2(x) = A_2^+ e^{ik_2 x} + A_2^- e^{-ik_2 x} \qquad k_2 = \frac{[2m(E-V_0)]^{1/2}}{\hbar}$$

$$\psi_3(x) = A_3^+ e^{ik_1 x}$$

conditions de continuité

en $x = 0$ ① $A_1^+ + A_1^- = A_2^+ + A_2^-$

② $k_1(A_1^+ - A_1^-) = k_2(A_2^+ - A_2^-)$

en $x = a$ ③ $A_2^+ e^{ik_2 a} + A_2^- e^{-ik_2 a} = A_3^+ e^{ik_1 a}$

④ $\cancel{i}\, k_2\left(A_2^+ e^{ik_2 a} - A_2^- e^{-ik_2 a}\right) = \cancel{i}\, k_1 A_3^+ e^{ik_1 a}$

comme on compare des ondes dans le même "milieu" (même E_p) pour les flux de particules, on aura :

coefficient de réflexion $\frac{A_1^- A_1^{-*}}{A_1^+ A_1^{+*}} = R$

coefficient de transmission $\frac{A_3^+ A_3^{+*}}{A_1^+ A_1^{+*}} = T$

il nous faut éliminer A_2^+, A_2^- entre les 4 équations

$k_2$① + ② $\Rightarrow (k_1 + k_2)A_1^+ + A_1^-(k_2 - k_1) = 2k_2 A_2^+$

$-k_2$① + ② $\Rightarrow A_1^+(k_1 - k_2) - A_1^-(k_1 + k_2) = -2k_2 A_2^-$

on étudie le cas $E < V_0$ $\Psi(x,t) = e^{-i\omega t}\psi(x)$

$x \leqslant 0$ $\psi_1(x) = A_1^+ e^{ik_1x} + A_1^- e^{-ik_1x}$ $k_1 = \frac{[2mE]^{1/2}}{\hbar}$

$\psi_2(x) = A_2^+ e^{Kx} + A_2^- e^{-Kx}$

$K = \frac{[2m(V_0-E)]^{1/2}}{\hbar}$

impossible on aurait une probabilité de présence de la particule ∞ pour $x\infty$

$0 < x < a$ $\psi_2(x) = A_2^- e^{-Kx}$

$x > a$ $\psi_3(x) = A_3^+ e^{ik_1x}$

on fait le même calcul avec $+K = ik_2$

① $A_1^+ + A_1^- = A_2^-$

② $ik_1 A_1^+ - ik_1 A_1^- = -K A_2^-$

③ $A_2^+ + A_2^- = A_3^+$

④ $KA_2^+ - K A_2^- = ik_1 A_3^+$

in fine, on rappelle que $\operatorname{ch}x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\operatorname{sh}x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$

$\operatorname{ch}^2x - \operatorname{sh}^2x = 1$

et on trouve

$$T = \frac{4k^2K^2}{4k^2K^2 + (k^2+K^2)^2\operatorname{sh}^2Ka}$$

et $$R = \frac{(k^2+K^2)\operatorname{sh}^2Ka}{4k^2K^2 + (k^2+K^2)^2\operatorname{sh}^2Ka}$$

donc $$T = \frac{4(2mE)(2m(V_0-E))}{16m^2E(V_0-E) + 4m^2V_0^2\operatorname{sh}^2Ka} = \frac{4E(V_0-E)}{4E(V_0-E) + V_0^2\operatorname{sh}^2Ka}$$

avec $Ka = \frac{a[2m(V_0-E)]^{1/2}}{\hbar} \Rightarrow$ (action $= p \times$ longueur $= \hbar k \times \ell$)

on voit que que si $Ka \gg 1$ $a[2m(V_0-E)]^{1/2} \gg \hbar$

on sort du quantique alors

$$T \Rightarrow \frac{4E(V_0-E)}{4E(V_0-E) + V_0^2\frac{e^{2Ka}}{4}} \Rightarrow \frac{16E(V_0-E)}{V_0^2e^{2Ka}} = \frac{16E(V_0-E)}{V_0^2}e^{-2Ka} \rightarrow 0$$

c'est ce que l'on trouve en classique

$k_2 (3) + (4) \quad 2A_2^+ k_2 e^{ik_2 a} = A_3^+ e^{ik_1 a}(k_2 + k_1)$

$+k_2 (3) - (4) \quad 2A_2^- k_2 e^{-ik_2 a} = A_3^+ e^{ik_1 a}(k_2 - k_1)$

d'où 2 équations à 2 inconnues (A_1^+ est imposé)

(5) $(k_1+k_2)A_1^+ + A_1^-(k_2-k_1) = A_3^+(k_1+k_2)e^{i(k_1-k_2)a}$

(6) $(k_1-k_2)A_1^+ - (k_1+k_2)A_1^- = -A_3^+(k_2-k_1)e^{i(k_1+k_2)a}$

$= A_3^+(k_1-k_2)e^{i(k_1+k_2)a}$

d'où on peut éliminer A_1^-

(5) $\times (k_1+k_2) +$ (6) (k_2-k_1)

$(k_1+k_2)^2 A_1^+ - (k_1-k_2)^2 A_1^+ = A_3^+(k_1+k_2)^2 e^{i(k_1-k_2)a} - A_3^+(k_2-k_1)^2 e^{i(k_1+k_2)a}$

$4k_1k_2 A_1^+ = A_3^+ e^{ik_1a}\left[(k_1+k_2)^2 e^{-ik_2a} - (k_2-k_1)^2 e^{ik_2a}\right]$

$4k_1k_2 A_1^+ = A_3^+ e^{ik_1a}\left[(k_1^2+k_2)(e^{-ik_2a} - e^{ik_2a}) + 2k_1k_2(e^{-ik_2a} + e^{ik_2a})\right]$

$4k_1k_2 A_1^+ = A_3^+ e^{ik_1a}\left[4k_1k_2\cos k_2a - 2i(k_1^2+k_2^2)\sin k_2a\right]$

on cherche le rapport entre $A_3^+A_3^{+*}$ et $A_1^+A_1^{+*}$

$(4k_1k_2)^2 A_1^+A_1^{+*} = A_3^+A_3^{+*}\left[(4k_1k_2)^2\cos^2 k_2a + 4(k_1^2+k_2^2)^2\sin^2 k_2a\right]$

$= A_3^+A_3^{+*}\left[16k_1^2k_2^2 - 16k_1^2k_2^2\sin^2 k_2a + 4(k_1^4+k_2^4+2k_1^2k_2^2)\sin^2 k_2a\right]$

$= A_3^+A_3^{+*}\left[16k_1^2k_2^2 + 4\sin^2 k_2a\,\underbrace{(k_1^4+k_2^4-2k_1^2k_2^2)}_{(k_1^2-k_2^2)^2}\right]$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{A_3^+A_3^{+*}}{A_1^+A_1^{+*}} = \frac{4k_1^2k_2^2}{4k_1^2k_2^2 + (k_1^2-k_2^2)^2\sin^2 k_2a}}$$

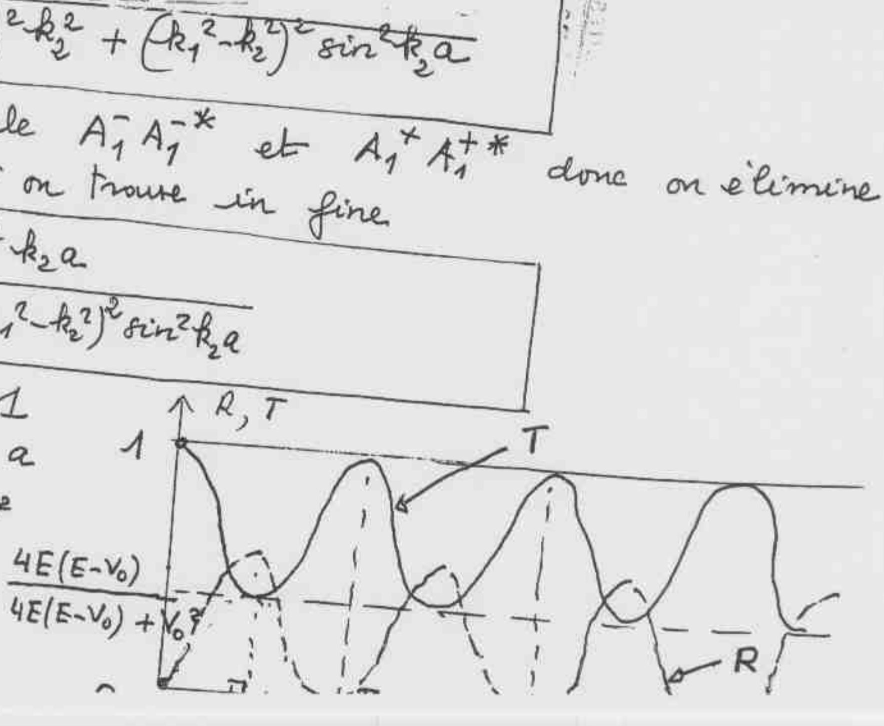
Si on veut R on calcule $A_1^-A_1^{-*}$ et $A_1^+A_1^{+*}$ donc on élimine A_3^+ entre (5) et (6) et on trouve in fine

$$\boxed{R = \frac{(k_2^2-k_1^2)^2\sin^2 k_2a}{4k_1^2k_2^2 + (k_1^2-k_2^2)^2\sin^2 k_2a}}$$

avec bien sur $R+T=1$

T (et R) sont périodiques avec a

$a = n\frac{\pi}{k_2} = n\frac{\lambda_2\pi}{2\pi} = n\frac{\lambda_2}{2}$



2) a) $E = 1eV$, $V_0 = 2eV$ $\quad a = 1 \mathring{A}$

$$T \Rightarrow \quad k = \frac{[2mE]^{1/2}}{\hbar} = \frac{[2 . 0,9107 . 10^{-30} \, 1,602 . 10^{-19}]^{1/2}}{1,0545 . 10^{-34}}$$

$$k = \frac{[2,917 . 10^{-49}]^{1/2}}{\hbar} = \frac{5,4017 . 10^{-25}}{1,0545 . 10^{-34}} = 5,122 . 10^{9} \; m^{-1}$$

$$K = \frac{[2m(V_0 - E)]^{1/2}}{\hbar} = k \qquad Ka = 5,122 . 10^{-1} = 0,5122$$

$$sh\, Ka = \frac{e^{Ka} - e^{-Ka}}{2} = \frac{1,6690 - 0,5999}{2} = \frac{1,0698}{2} = 0,5349$$

$$sh^2 Ka = 0,28614$$

$$T = \frac{4}{4 + 4 \times 0,28614} = \frac{1}{1 + 0,28614} = 0,7775$$

~~b) idem (Remarque s'il a la même énergie)~~

c) $\left(70\, kg \times \frac{36 . 10^3}{36 . 10^2}\right) . \ell = 700 \times 50 = 3500 .$

donc pas quantique

Est-ce que le cycliste passe?

oui si $\frac{1}{2} m v^2 > mgh \qquad v^2 > 2gh$

si $100 \underset{\sim}{>} 20 . 20 = 400$ NON

il monte jusqu'à une hauteur (altitude) h_0 telle que

$$v^2 = 2g h_0 \qquad h_0 \simeq \frac{v^2}{2g} = \frac{100}{20} = 5,096$$

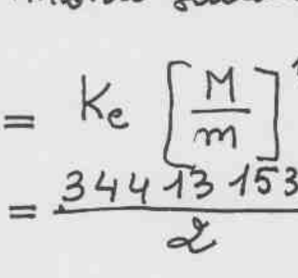
donc il monte seulement à peu près le quart de la pente

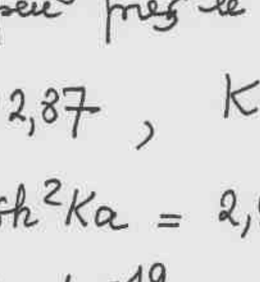
b) $K = K_e \left[\frac{M}{m}\right]^{1/2} = 42,87$, $Ka = 5,122 \times 42,87 \times a = 21,959$

$$sh\, Ka = \frac{34413\,15348}{2} \Rightarrow sh^2 Ka = 2,96 . 10^{18}$$

$$T = \frac{1}{1 + 2,96 . 10^{18}} = 3,37 . 10^{-19}$$

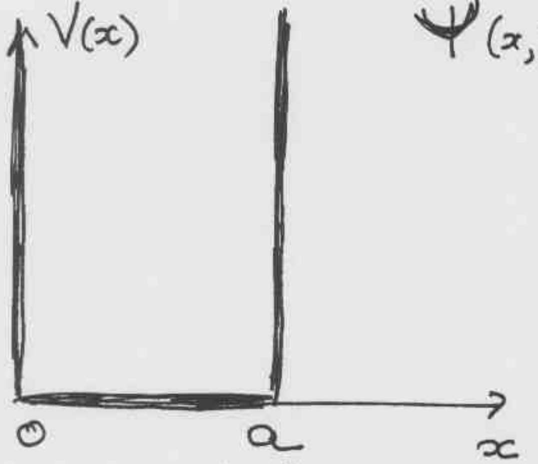
exemple de KDP , DKDP





1er ordre

NON



$$\Psi(x,t) = e^{i\omega t}\psi(x)$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0$$

$$\psi = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi = -k^2\psi$$

$$k = \frac{[2mE]^{1/2}}{\hbar}$$

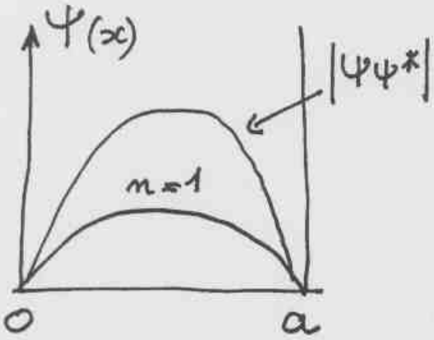
$$\psi = A_+ e^{ikx} + A_- e^{-ikx}$$

$$\psi(0) = 0 \qquad A_+ + A_- = 0$$

$$\psi(a) = 0 \qquad A_+ e^{ika} + A_- e^{-ika} = 0 = A_+\left(e^{ika} - e^{-ika}\right)$$

$$\Rightarrow \sin ka = 0 \qquad ka = n\pi \qquad k = \frac{n\pi}{a}$$

comme $E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Rightarrow E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} n^2$

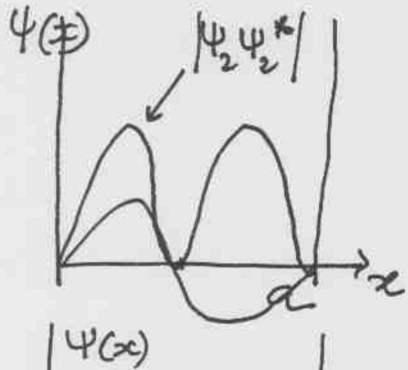


$$\psi_n = A_+\left(e^{i\frac{n\pi}{a}x} - e^{-i\frac{n\pi}{a}x}\right)$$

$n = 1 \qquad \psi_n = 2iA_+ \sin\frac{n\pi}{a}x$

$$\psi_1 = 2iA_+ \sin\frac{\pi x}{a}$$

$$\psi_1\psi_1^* = 4A_+^2 \sin^2\frac{\pi x}{a}$$

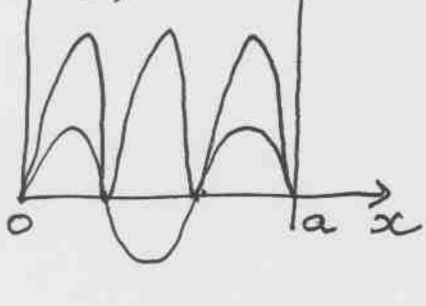


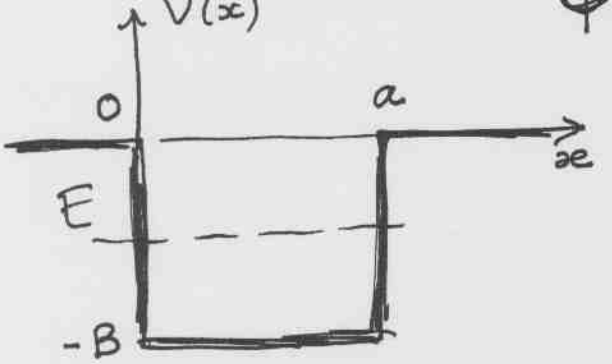
$n = 2 \qquad \psi_2 = 2iA_+ \sin\frac{2\pi x}{a}$

$$\psi_2\psi_2^* = 4A_+^2 \sin^2\frac{2\pi x}{a}$$

$n = 3 \qquad \psi_3 = 2iA_+ \sin\frac{3\pi x}{a}$

etc.





$$\Psi(x,t) = e^{\ldots}\,\psi(x)$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - E_P)\psi = 0$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - (-B))\psi = 0$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}(B+E)\psi = 0$$

on a $E > -B$ et $E < 0$ donc $B + E > 0$

$x < 0 \qquad \psi(x) = A e^{\alpha x} \qquad \alpha = \frac{[-2mE]^{1/2}}{\hbar}$

$0 < x < a \qquad \psi(x) = B_+ e^{ikx} + B_- e^{-ikx} \qquad k = \frac{[2m(B+E)]^{1/2}}{\hbar}$

$x > a \qquad \psi(x) = C e^{-\alpha x}$

① $A = B_+ + B_-$

② $\alpha A = ik(B_+ - B_-)$

③ $B_+ e^{ika} + B_- e^{-ika} = C e^{-\alpha a}$

④ $ik B_+ e^{ika} - ik B_- e^{-ika} = -\alpha C e^{-\alpha a}$

$-\alpha$① + ② $\qquad 0 = -\alpha B_+ - \alpha B_- + ikB_+ - ikB_-$

$$B_+(ik - \alpha) + B_-(-ik - \alpha) = 0$$

α③ + ④ $\qquad \alpha B_+ e^{ika} + \alpha B_- e^{-ika} + ikB_+ e^{ika} - ikB_- e^{-ika} = 0$

$$B_+(ik + \alpha)e^{ika} + B_-(-ik + \alpha)e^{-ika} = 0$$

solution si Determinant $= 0$

$$(ik - \alpha)(-ik + \alpha)e^{-ika} - (-ik - \alpha)(ik + \alpha)e^{ika} = 0$$

$$-(\alpha - ik)^2 e^{-ika} + (ik + \alpha)^2 e^{ika} = 0$$

$$(\alpha + ik)^2 e^{ika} = \frac{(\alpha - ik)^2}{e^{ika}}$$

$$e^{2ika} = \left(\frac{\alpha - ik}{\alpha + ik}\right)^2 \Longrightarrow e^{ika} = \pm\left(\frac{\alpha - ik}{\alpha + ik}\right)$$

$$e^{ika} = e^{in\pi}\left(\frac{\alpha - ik}{\alpha + ik}\right)$$

$$e^{i(ka - n\pi)} = \frac{\alpha - ik}{\alpha + ik} = \frac{e^{-i\phi}}{e^{+i\phi}}$$

avec $\phi = \operatorname{artg}\frac{k}{\alpha} \longrightarrow -2\phi = ka - n\pi$

$$\Phi = \frac{n\pi}{2} - \frac{ka}{2} = \operatorname{arctg}\frac{k}{\alpha}$$

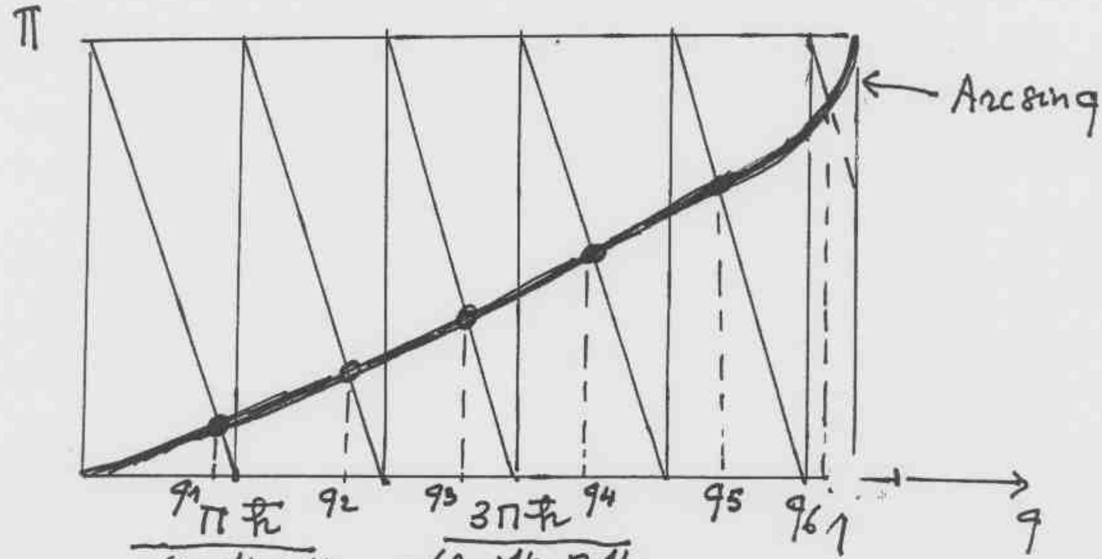
$$\sin\left(\frac{n\Pi}{2} - \frac{ka}{2}\right) = \sin\Phi = \frac{k}{[\alpha^2+k^2]^{1/2}} = q$$

si $q=0$ $E=-B$, la particule est au fond du puits

si $q=1$ $E=0$ la particule est au sommet du puits

$$\frac{k}{[\alpha^2+k^2]^{1/2}} = \left[\frac{2m\,(B+E)}{-2mE+2mB+2mE}\right]^{1/2} = \left[\frac{B+E}{B}\right]^{1/2} = q$$

$$2\,\mathrm{Arc}\sin q = n\Pi - ka = n\Pi - a\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^{1/2} B^{1/2} q$$



$$\frac{\Pi\hbar}{a(2m)^{1/2}B^{1/2}} \qquad \frac{3\Pi\hbar}{a(2m)^{1/2}B^{1/2}}$$

<u>nombre d'états</u>

on trouve des solutions discrètes $q_1, q_2, q_3 \dots$ etc
il y en a d'autant plus que $\frac{\Pi\hbar}{a(2m)^{1/2}B^{1/2}}$ est petit donc que B est grand

<u>solutions pairs ou impairs</u>

$$B_- = -B_+\frac{\alpha-ik}{\alpha+ik} = -B_+ e^{ika}e^{-in\Pi}$$

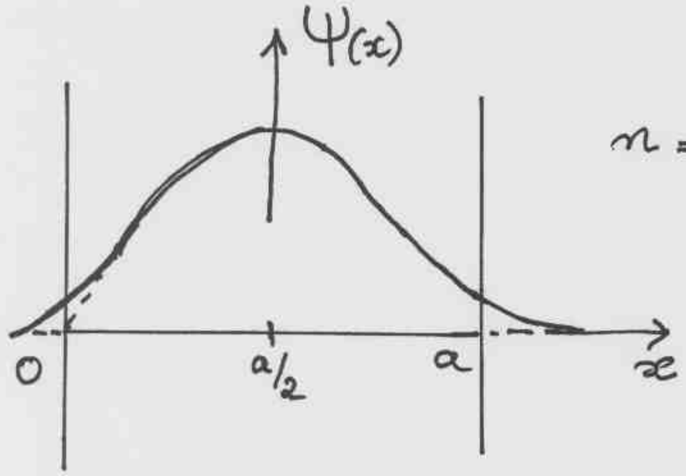
si n est impair : $n=1$ $\quad B_- = B_+ e^{ika}$

$$\Psi(x) = B_+ e^{ikx} + B_+ e^{ika}e^{-ikx}$$

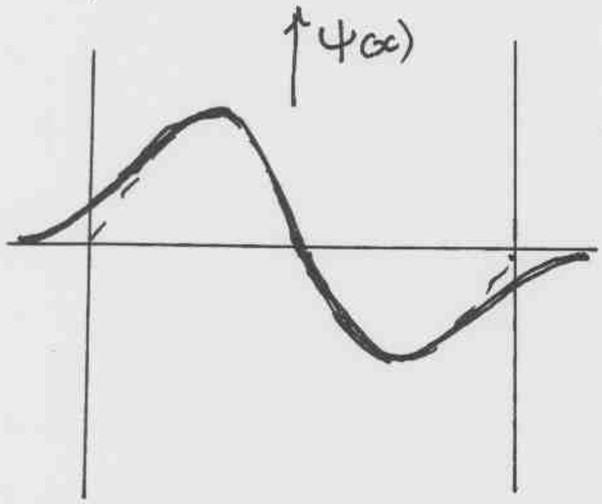
$$\Psi(x) = B_+\left(e^{ik(x-a/2)} + e^{+ik(a-\frac{a}{2})-ikx}\right)$$

$$\Psi(x) = B_+\left(e^{ik(x-a/2)} + e^{-ik(x-\frac{a}{2})}\right) = 2B_+\cos k(x-\tfrac{a}{2})$$

et si n paire $\quad B_- = -B_+ e^{ika}$ d'où des fonctions sinus centrées sur $x = a/2$

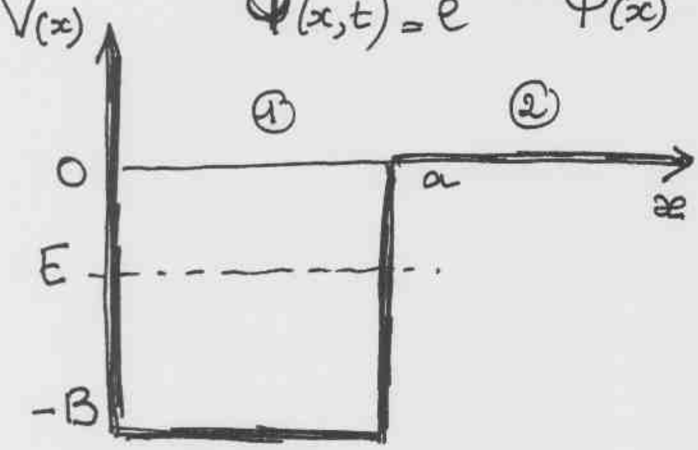


$n = 1$



$n = 2$

$\Psi(x,t) = e^{-i\omega t}\,\Psi(x)$



$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - E_p)\Psi = 0$$

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} = -(\ )\Psi$$

dans ①

$E - (-B) = B + E > 0$

$E < 0$ et $|E| < |B|$

donc $B + E > 0$

dans ② $E_p = 0$

donc $E - E_p < 0$

① d'où $\Psi_1 = A_1^+ e^{ik\cdot x} + A_1^- e^{-ik\cdot x}$ $\quad k = \dfrac{[2m(B+E)]^{1/2}}{\hbar}$

② $\dfrac{d^2\Psi}{dx^2} = -\dfrac{2m}{\hbar^2}E\Psi = \dfrac{2m}{\hbar^2}|E|\Psi = K^2\Psi$ $\quad \dfrac{[2m|E|]^{\frac{1}{2}}}{\hbar} = K$

$\Psi_2 = A_2 e^{-Kx}$

on a

ⓐ $A_1^+ + A_1^- = 0$

ⓑ $A_1^+ e^{ik\cdot a} + A_1^- e^{-ik\cdot a} = A_2 e^{-Ka}$

ⓒ $ik\,A_1^+ e^{ik\cdot a} - ik\,A_1^- e^{-ik\cdot a} = -K A_2 e^{-Ka}$

③ $A_1^+\left(e^{ik\cdot a} - e^{-ik\cdot a}\right) = A_2 e^{-Ka}$

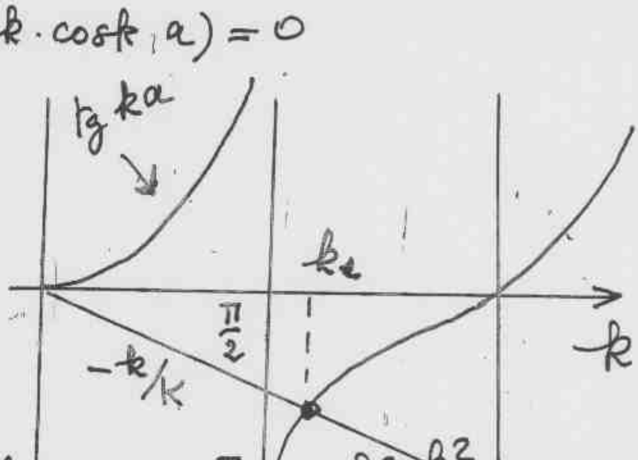
④ $i k_1 A_1^+\left(e^{ik\cdot a} + e^{-ik\cdot a}\right) = -K A_2 e^{-Ka}$

éliminons A_2 $\quad K③ + ④$

$K A_1^+ 2i \sin k\,a + ik\,A_1^+ 2\cos k\,a = 0$

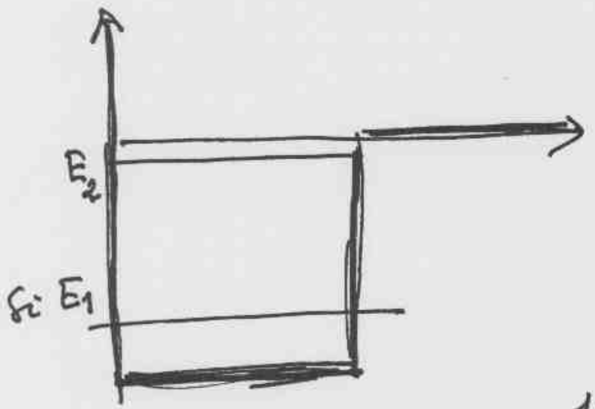
$2A_1^+ i\,(K \sin k\cdot a + k\cdot\cos k\,a) = 0$

$\longrightarrow \operatorname{tg} k\cdot a = -\dfrac{k}{K}$



$$\operatorname{tg} \frac{(2m(B+E))^{1/2}}{\hbar}a = -\frac{[2m(B+E)]^{1/2}}{[2m|E|]^{1/2}} = -\left[\frac{B+E}{|E|}\right]^{1/2}$$

k_1 est la première solution en k donc en $E = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$, il faut que $ka < \dfrac{\pi}{2}$. La dernière solution d'un état lié correspond à $E = 0$



si E_1 est une solution, pas de problème
si E_2 est la première solution, cela devient critique
mais si $E = 0$ n'est pas la première solution, il n'y a pas d'états liés
donc

il faut $\dfrac{(2m\,(B+E))^{1/2}}{\hbar} \cdot a \geqslant \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{[2m\,B]^{1/2}}{\hbar}\,a \geqslant \dfrac{\pi}{2}$

$$\frac{2mB}{\hbar^2}\,a^2 \geqslant \frac{\pi^2}{4} \qquad G_0 = \frac{a^2 B m}{\hbar^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

si $G < G_0$ pas d'état lié.

donc il faut $B \geqslant \dfrac{\pi^2}{8}\dfrac{\hbar^2}{m \cdot a^2}$