L3 Physique et Chimie 07/08

Ph. Boulard
Mathieu Barthélemy

CORRIGÉ TD Conducteurs et milieux

I Onde électromagnétique dans un DLHI (Dunod - Tout en un - 2'année PC 2004)

1. $k = \sqrt{\varepsilon_r}\dfrac{\omega}{c}$.

2. $k = \sqrt{2,56} \times \dfrac{2\pi \times 10^9}{3 \cdot 10^8} = \cancel{53,6}\ 33,5\ \mathrm{m}^{-1}$.

3. Nous pouvons écrire le champ électrique sous la forme : $\overrightarrow{E} = E_0 \cos(\omega t - kx)\overrightarrow{u_y}$. Le champ magnétique est donné par la relation de structure :

$$\overrightarrow{B} = \frac{n}{c}\overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{E} = \frac{nE_0}{c}\cos(\omega t - kx)\overrightarrow{u_z}$$

$$\underline{\overrightarrow{B}} = \frac{\underline{\overrightarrow{k}} \wedge \underline{\overrightarrow{E}}}{\omega} \ \text{ ici } \rightarrow \ \overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{E}}{\omega} = \frac{\frac{n\omega}{c}\overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{E}}{\omega}$$

où $n = \sqrt{\varepsilon_r} = 1,6$. Le rapport des normes est égal à $\dfrac{\left\|\overrightarrow{E}\right\|}{\left\|\overrightarrow{B}\right\|} = \dfrac{c}{n}$.

4. La vitesse de phase est $v_\varphi = \dfrac{c}{n} = 1,875\ 10^8\ \mathrm{m.s}^{-1}$.

II Transparence d'un conducteur dans l'U.V. (Ex. et Pbs Phys 2'année H Prépa 2005)

1 Pour une densité électronique de l'ordre de $10^{29}\ \mathrm{m}^{-3}$, on obtient une pulsation de plasma $\omega_p \approx 2 \cdot 10^{16}\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.
La longueur d'onde associée à la constante de temps τ est :

$$\lambda = c\,\tau \approx 3\ \mu\mathrm{m}.$$

Elle est située dans l'infrarouge.
La longueur d'onde associée à la pulsation de plasma est :

$$\lambda_p = \frac{2\pi c}{\omega_p} \approx 0,09\ \mu\mathrm{m}.$$

2 Aux fréquences considérées, la longueur d'onde est très supérieure à l'amplitude de déplacement des électrons : on peut alors négliger la variation de $\vec{v}$ due aux variations de la partie spatiale et ainsi : $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}$.

$$\frac{\partial \underline{\vec{v}}}{\partial t} = i\,\omega\,\underline{\vec{v}} = -\frac{e\underline{\vec{E}}}{m} - \frac{\underline{\vec{v}}}{\tau},$$

soit :

$$\underline{\vec{v}} = -\frac{e\tau}{m}\,\frac{\underline{\vec{E}}}{(1 + i\omega\tau)}.$$

En notation complexe, il vient alors :

$$\underline{\vec{j}} = -N_0 e\,\underline{\vec{v}} = \frac{N_0 e^2 \tau}{m}\,\frac{\underline{\vec{E}}}{(1 + i\omega\tau)} = \underline{\gamma}\underline{\vec{E}},$$

avec :

$$\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 + j\omega\tau},$$

$\gamma_0 = \dfrac{N_0 e^2 \tau}{m}$ étant la conductivité statique du milieu.

3 Les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\left|\begin{array}{l} \operatorname{div}\vec{E} = 0\ ; \\ \operatorname{div}\vec{B} = 0\ ; \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\ ; \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{array}\right.$$

Pour l'onde transverse, $\operatorname{div}\vec{E} = 0$, donc pour l'onde plane progressive monochromatique :
$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$, on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) = -\Delta\vec{E} = \underline{k}^2\underline{\vec{E}}.$$

Les équations couplant les champ $\vec{E}$ et $\vec{B}$ donnent d'autre part :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\mu_0\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Utilisant la relation $\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma}\underline{\vec{E}}$, on obtient :

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0\underline{\gamma}\omega - \underline{k}^2\right)\underline{\vec{E}} = \vec{0}.$$

L'équation de propagation impose donc la relation de dispersion :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - i\frac{\underline{\gamma}}{\varepsilon_0\omega}\right) = \underline{\varepsilon}\mu_0\omega^2,$$

qui permet de définir la permittivité complexe du milieu :

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon_0\left(1 - i\frac{\underline{\gamma}}{\varepsilon_0\omega}\right),$$

et l'indice : $\underline{n}$ est la partie réelle positive de $\dfrac{\underline{\varepsilon}}{\varepsilon_0}$.

4 Pour $\omega\tau \ll 1$, la conductivité complexe est assimilable à la conductivité γ_0 en régime statique.
La relation de dispersion peut alors être simplifiée, sachant que $\omega \ll \dfrac{1}{\tau} \ll \omega_p$;

$$\underline{k}^2 \approx \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - i\frac{\gamma_0}{\varepsilon_0\omega}\right) = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - i\frac{\omega_p^2\tau}{\omega}\right)$$

$$\approx \frac{\omega^2}{c^2}\left(-i\frac{\omega_p^2\tau}{\omega}\right) = -i\mu_0\gamma_0\omega$$

soit :

$$\underline{k} \approx \pm\sqrt{\mu_0\gamma_0\omega}\,e^{-i\frac{\pi}{4}} = \pm\frac{1-i}{\delta}$$

on retrouve alors l'effet de peau étudié dans l'*exercice* 3, l'épaisseur de peau étant :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}.$$

5 a) Le seul terme dissipatif introduit dans le modèle étudié correspond à la force $\vec{f} = -m\frac{\vec{v}}{\tau}$. Son influence peut être négligée si $\omega\tau >> 1$: la conductivité devient imaginaire pure, la densité volumique de courant et le champ électrique sont en quadrature, de sorte que la puissance moyenne dissipée par unité de volume $<\vec{j}\,.\,\vec{E}> = \frac{1}{2}\mathcal{R}e(\underline{\vec{j}}\,.\,\underline{\vec{E}}^*)$ s'annule.

Pour : $\gamma = \frac{\gamma_0}{i\omega\tau} = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{i\omega}$, la relation de dispersion devient :

$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ (relation de dispersion de Klein-Gordon), soit :

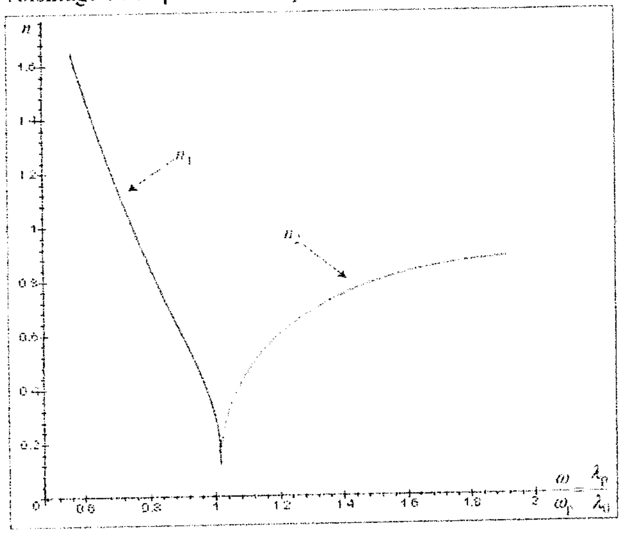
$$\varepsilon = \varepsilon_0\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right).$$

L'indice s'en déduit :

• si $\omega < \omega_p$: $\underline{n} = -in_2 = -i\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}$;

• si $\omega > \omega_p$: $\underline{n} = n_1 = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$.

b) Les courbes suivantes illustrent les variations d'indice au voisinage de la pulsation de plasma.



Lorsque $\frac{1}{\tau} << \omega < \omega_p$, l'indice est imaginaire pur : l'onde obtenue est stationnaire, évanescente, il n'y a pas de propagation à proprement parler (le milieu n'est pas ici absorbant, mais parfaitement réfléchissant pour une onde se propageant dans l'air qui aborderait le métal dans ce domaine spectral).

Si $\frac{1}{\tau} << \omega_p < \omega$, l'indice est réel : il y a propagation sans atténuation dans le milieu qui est ici transparent.

c) La pulsation réduite $\frac{\omega}{\omega_p}$ portée en abscisse est égale à $\frac{\lambda_p}{\lambda_0}$: l'axe horizontal est donc gradué comme celui de la courbe expérimentale fournie. L'accord entre les courbes expérimentales et théoriques est assez satisfaisant : à « basse » fréquence ($\omega < \omega_p$), l'indice est imaginaire pur, et on retrouve la transparence du métal dans l'ultraviolet lointain ($\lambda_0 < 1/6$ µm environ).

Les parties réelle et imaginaire ne s'annulent pas nettement au même point : il existe une petite zone spectrale transitoire pour laquelle il y a propagation avec absorption (pour $\omega \approx \omega_p$, les termes « oubliés » ne sont plus parfaitement négligeables par rapport à la contribution du facteur $1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \approx 0$).

d) La frontière entre les deux comportements prévus est obtenue lorsque $\frac{1}{\lambda_0}$ prend la valeur $\frac{1}{\lambda_p} \approx 5$ µm^{-1}.

La pulsation de plasma du sodium vaut donc :

$$\omega_p \approx 9{,}4\,.\,10^{15}\ \text{rad}\,.\,\text{s}^{-1},$$

ce qui correspond à une densité d'électrons de conduction :

$$N_0 \approx 2{,}8\,.\,10^{28}\ \text{m}^{-3}.$$

Le nombre d'atomes de sodium par unité de volume dans le métal est $\frac{N_A \mu}{M} \approx 2{,}5\,.\,10^{28}$ m^{-3}. Cette valeur est proche de la valeur de N_0 précédente : dans le métal sodium, chaque atome de cet élément alcalin fournit un électron de conduction.