L3 PC 07-08

Ph. Brulard, M. Barthélémy

TD Dispersion et absorption des ondes électromagnétiques
CORRIGÉ (extraits de Physique Tout-en-un 2e année PC, Dunod)

I Relation de dispersion

1. Le champ électrique vérifie l'équation de d'Alembert dans le vide. Nous en déduisons la relation de dispersion $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}$ et les vitesses de phase et de groupe : $v_\varphi = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}}$ et $v_g = \frac{c^2}{v_\varphi}$.

2. L'onde n'étant pas plane, nous ne pouvons pas utiliser la relation de structure des ondes planes. Il faut revenir à l'équation de Maxwell-Faraday. Tous calculs faits, nous obtenons :

$$\overrightarrow{B} = E_{0n}\frac{n\pi}{a\omega}\cos\left(\frac{n\pi z}{a}\right)\sin(\omega t - kx)\overrightarrow{u_x} + \frac{k}{\omega}E_{0n}\sin\left(\frac{n\pi z}{a}\right)\cos(\omega t - kx)\overrightarrow{u_z}.$$

3. Pour calculer la vitesse de déplacement de l'énergie, on calcule la densité moyenne d'énergie électromagnétique $\langle u_{em}\rangle$ et le vecteur de Poynting moyen. On calcule ensuite la puissance moyenne $\mathcal{P}$ traversant le rectangle Σ perpendiculaire à l'axe Ox, de dimension L selon Oy et a selon Oz, puis l'énergie moyenne U_{em} contenue dans le parallélépipède de base Σ et de longueur $\mathrm{d}x = v_e\,\mathrm{d}t$ où v_e est la vitesse de propagation de l'énergie. Ces grandeurs sont reliées par : $\mathcal{P}\,\mathrm{d}t = U_{em}$. Les calculs sont effectués à la fin du chapitre précédent. Nous trouvons :

$$v_e = \frac{k}{\omega}c^2 = c^2\frac{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}}{\omega} = v_g.$$

II Propagation des ondes électromagnétiques dans un plasma

1. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un électron donne : $m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = -e\overrightarrow{E}$, soit en régime forcé : $im\omega\underline{\overrightarrow{v}} = -e\underline{\overrightarrow{E}}$. Le vecteur densité de courant étant égal à $\overrightarrow{j} = -ne\overrightarrow{v}$, nous en déduisons : $\underline{\overrightarrow{j}} = \frac{-in_0e^2}{m\omega}\underline{\overrightarrow{E}}$. On peut donc associer au plasma la conductivité complexe : $\underline{\gamma} = \frac{-in_0e^2}{m\omega}$.

2. Maintenant, le champ électrique s'accompagne d'un champ magnétique. L'équation du mouvement d'un électron devient :

$$m\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t^2} = -e\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r},t) - e\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t}\wedge\overrightarrow{B}(\overrightarrow{r},t).$$

Comme dans l'étude du modèle de l'électron élastiquement lié, cette équation se simplifie car les électrons ne sont pas relativistes :

- l'action du champ magnétique de l'onde est négligeable devant celle du champ électrique,
- le champ électrique apparaît comme uniforme à l'échelle du déplacement des électrons.

En effet, $\|\overrightarrow{F}_m\| \sim evB$ or $\|\overrightarrow{B}\| \sim \frac{kE}{\omega}$ avec $\frac{k}{\omega} \sim c$ donc $\frac{\|\overrightarrow{F}_m\|}{\|\overrightarrow{F}_e\|} \sim \frac{v}{c} \ll 1$

et $\frac{\|\overrightarrow{r}\|}{\lambda} \sim \frac{v}{\omega\lambda} \sim \frac{kv}{\omega} \sim \frac{v}{c} \ll 1$, donc le terme $\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r}$ peut être considéré comme constant et inclus dans la phase de $\underline{\overrightarrow{E}}_0$.

L'équation du mouvement devient :

$$m\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t^2} = -e\underline{\overrightarrow{E}}_0\exp i\omega t.$$

C'est la même qu'à la question précédente. Le résultat de la question 1 est donc encore valable.

Il reste à étudier la densité volumique de charge. En combinant l'équation de Maxwell-Gauss, l'équation locale de conservation de la charge et la relation entre $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{E}$ établie précédemment et en recherchant ρ sous la forme d'onde plane $\underline{\rho} = \underline{\rho}_0\exp(i(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r}))$, nous obtenons : $i\omega\left(1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}\right)\underline{\rho}_0 = 0$ où $\omega_P = \sqrt{\frac{n_0e^2}{m\varepsilon_0}}$.

Si $\omega \neq \omega_P$ (ce que nous supposerons dans la suite), $\underline{\rho} = 0$.

$$\operatorname{div}\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$$
$$\operatorname{div}\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$
$$\vec{j} = \underline{\gamma}\vec{E}$$
$$\Rightarrow \operatorname{div}\vec{j} = \underline{\gamma}\operatorname{div}\vec{E} = \underline{\gamma}\rho/\varepsilon_0$$
soit $\frac{\underline{\gamma}\rho}{\varepsilon_0} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ (1)

si ρ sinusoïdal : $\rho = \rho_0 e^{i\omega t}$

(1) $\Rightarrow \frac{\underline{\gamma}}{\varepsilon_0}\underline{\rho_0} + i\omega\underline{\rho_0} = 0$

soit $\left(-\frac{i n_0 e^2}{m\omega\varepsilon_0} + i\omega\right)\underline{\rho_0} = 0$

$$i\omega\left(1 - \frac{n_0e^2}{m\omega^2\varepsilon_0}\right)\underline{\rho_0} = 0$$

Les équations de Maxwell en notations complexes dans le plasma s'écrivent donc :

$$\begin{cases} -i\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{\underline{E}}=0 \\ -i\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{\underline{B}}=0 \\ -i\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{\underline{E}}=-i\omega\overrightarrow{\underline{B}} \\ -i\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{\underline{B}}=\mu_0\left(\overrightarrow{\underline{j}}+i\omega\varepsilon_0\overrightarrow{\underline{E}}\right)=i\omega\mu_0\varepsilon_0\left(\dfrac{\gamma}{i\varepsilon_0\omega}+1\right)\overrightarrow{\underline{E}}=i\omega\mu_0\underline{\varepsilon}\overrightarrow{\underline{E}} \end{cases}$$

où $\varepsilon=\varepsilon_0\left(1-\dfrac{\omega_P^2}{\omega^2}\right)$. Elles prennent la même forme que dans le vide à condition de remplacer ε_0 par ε. La relation entre k et ω est donc :

$$k^2=\varepsilon\mu_0\omega^2=\frac{1}{c^2}\left(\omega^2-\omega_P^2\right).$$

Pour $\omega>\omega_P$: le module d'onde k est réel. Il s'écrit : $k=\dfrac{1}{c}\sqrt{\omega^2-\omega_P^2}$. Pour $\omega<\omega_P$: le vecteur d'onde est imaginaire pur, de la forme $k=\pm ik''$ avec : $k''=\dfrac{1}{c}\sqrt{\omega_P^2-\omega^2}$. L'onde ne se propage pas.

III Dispersion dans un métal réel

1. La loi d'Ohm $\overrightarrow{j}=\gamma\overrightarrow{E}$ n'est valable que si $\omega\ll10^{14}$ rad.s^{-1} environ. Dans un conducteur ohmique, le courant de déplacement est donc négligeable devant le courant de conduction (voir chapitre sur les équations locales de l'électromagnétisme). D'autre part, en utilisant l'équation locale de conservation de la charge, la loi d'Ohm locale et l'équation de Maxwell-Gauss, nous pouvons établir l'équation vérifiée par la densité volumique de charge : $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\dfrac{\gamma}{\varepsilon_0}\rho=0$, soit $\rho(M,t)=\rho(M,t_0)\exp\left(-\dfrac{t-t_0}{\tau}\right)$ avec $\tau=\dfrac{\varepsilon_0}{\gamma}\ll T=\dfrac{2\pi}{\omega}$. Nous considérerons donc que $\rho=0$. Finalement, en suivant la démarche habituelle, nous pouvons établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le champ électrique : $\Delta\overrightarrow{E}=\mu_0\gamma\dfrac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$. La relation de dispersion est donc : $k^2=-i\omega\mu_0\gamma$, qui se résout en : $k=\pm\dfrac{1-i}{\delta}$ où $\delta=\sqrt{\dfrac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$ est l'épaisseur de peau du métal.

2. Les ondes s'écrivent :

- *Onde incidente* :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\underline{E_i}}=\overrightarrow{\underline{E_0}}\exp\left(i\left(\omega t-k_0z\right)\right) \\ \overrightarrow{\underline{B_i}}=\dfrac{\overrightarrow{k_0}\wedge\overrightarrow{\underline{E_0}}}{\omega}\exp\left(i\left(\omega t-k_0z\right)\right) \end{cases}$$

  où $\overrightarrow{k_0}=k_0\overrightarrow{u_z}$ avec $k_0=\dfrac{\omega}{c}$;

- *Onde réfléchie* :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\underline{E_r}}=\overrightarrow{\underline{E_{0r}}}\exp\left(i\left(\omega t+k_0z\right)\right) \\ \overrightarrow{\underline{B_r}}=-\dfrac{\overrightarrow{k_0}\wedge\overrightarrow{\underline{E_{0r}}}}{\omega}\exp\left(i\left(\omega t+k_0z\right)\right) \end{cases}$$

- *Onde transmise* :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\underline{E_t}}=\overrightarrow{\underline{E_{0t}}}\exp\left(i\left(\omega t-\underline{k}_mz\right)\right) \\ \overrightarrow{\underline{B_t}}=\dfrac{\overrightarrow{\underline{k}_m}\wedge\overrightarrow{\underline{E_{0t}}}}{\omega}\exp\left(i\left(\omega t-\underline{k}_mz\right)\right) \end{cases}$$

  où $\overrightarrow{\underline{k}_m}=\underline{k}_m\overrightarrow{u_z}$ avec $\underline{k}_m=\dfrac{1-i}{\delta}$ (on choisit le signe + car l'onde se propage dans le sens des z croissants).

Le champ incident est transverse donc les champs électriques et magnétiques sont tangents à la surface du conducteur. Le champ électrique est donc continu à l'interface $z=0$. Le conducteur étant réel, il est parcouru par des courants volumiques, il n'y a donc pas lieu de considérer une densité surfacique de courant à la surface. Le champ magnétique est donc continu en $z=0$. Nous en déduisons les relations :

$$\overrightarrow{\underline{E_0}}+\overrightarrow{\underline{E_{0r}}}=\overrightarrow{\underline{E_{0t}}}\quad\text{et}\quad\left(\overrightarrow{k_0}\wedge\overrightarrow{\underline{E_0}}\right)-\left(\overrightarrow{k_0}\wedge\overrightarrow{\underline{E_{0r}}}\right)=\overrightarrow{\underline{k}_m}\wedge\overrightarrow{\underline{E_{0t}}}$$

ou encore (les champs électriques étant orthogonaux aux vecteurs d'onde) :

$$\overrightarrow{\underline{E_0}} + \overrightarrow{\underline{E_{0r}}} = \overrightarrow{\underline{E_{0t}}} \quad \text{et} \quad k_0 \left(\overrightarrow{\underline{E_0}} - \overrightarrow{\underline{E_{0r}}} \right) = \underline{k}_m \overrightarrow{\underline{E_{0t}}}.$$

qui conduisent à $1 - \underline{r} = \underline{t}$

$k_0(1 - \underline{r}) = \underline{k_m}\,\underline{t}$

On définit les coefficients $\underline{r}$ et $\underline{t}$ par $\overrightarrow{\underline{E_{0r}}} = \underline{r}\,\overrightarrow{\underline{E_0}}$ et $\overrightarrow{\underline{E_{0t}}} = \underline{t}\,\overrightarrow{\underline{E_0}}$. La résolution du système ci-dessus donne :

$\underline{r} = \dfrac{k_0 - \underline{k_m}}{\underline{k_m} + k_0}$

$$\cancel{\underline{r} = \frac{\underline{k}_m - k_0}{\underline{k}_m + k_0}} \quad \text{et} \quad \underline{t} = \frac{2k_0}{\underline{k}_m + k_0}.$$

3. Le pouvoir réflecteur du métal est égal à $R = \dfrac{\left\langle \left| \overrightarrow{\Pi_r}(0,t) \cdot \overrightarrow{u_z} \right| \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{\Pi_i}(0,t) \cdot \overrightarrow{u_z} \right\rangle}$.

Or

$$\left\langle \overrightarrow{\Pi_i}(0,t) \right\rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re} \left(\overrightarrow{\underline{E_i}} \wedge \frac{\overrightarrow{\underline{B_i}}^*}{\mu_0} \right) = \frac{1}{2c\mu_0} \left| \underline{E}_0 \right|^2 \overrightarrow{u_z}$$

et

$$\left\langle \overrightarrow{\Pi_r}(0,t) \right\rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re} \left(\overrightarrow{\underline{E_r}} \wedge \frac{\overrightarrow{\underline{B_r}}^*}{\mu_0} \right) = \frac{1}{2c\mu_0} \left| \underline{r} \right|^2 \left| \underline{E}_0 \right|^2 \overrightarrow{u_z}.$$

Nous en déduisons : $R = \left| \underline{r} \right|^2 = \dfrac{1 + \left(1 - \dfrac{\omega\delta}{c} \right)^2}{1 + \left(1 + \dfrac{\omega\delta}{c} \right)^2}$.

Si $\delta \ll \lambda_0 = \dfrac{2\pi c}{\omega}$, le métal se comporte comme un métal parfait et R tend vers 1 : toute l'énergie de l'onde incidente est réfléchie.

4. Le champ électrique complexe dans le métal s'écrit :

$$\overrightarrow{\underline{E_t}} = \underline{t}\,\underline{E}_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta} \right) \exp\left(i \left(\omega t - \frac{z}{\delta} \right) \right)$$

La puissance moyenne dissipée par effet Joule cherchée est égale à :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_J &= \int_0^\infty \gamma \left\langle E_t(z,t)^2 \right\rangle S \,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{2} \gamma \left| \underline{E}_t \right|^2 S \,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{2} \gamma \left| \underline{t} \right|^2 \left| \underline{E}_0 \right|^2 \exp\left(\frac{-2z}{\delta} \right) S \,\mathrm{d}z \\
&= \frac{\delta\gamma}{4} \frac{(2\delta\omega/c)^2}{1 + \left(1 + \dfrac{\omega\delta}{c} \right)^2} \left| \underline{E}_0 \right|^2 S.
\end{aligned}$$

La puissance transmise par l'onde incidente est égale au flux moyen du vecteur de Poynting transmis en $z = 0$, à travers la surface S. Il vient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_t &= \left\langle \overrightarrow{\Pi_t}(0,t) \right\rangle \cdot S\overrightarrow{u_z} \\
&= \frac{1}{2} \mathrm{Re} \left(\overrightarrow{\underline{E_t}} \wedge \frac{\overrightarrow{\underline{B_t}}^*}{\mu_0} \right) \cdot S\overrightarrow{u_z} \\
&= \frac{1}{2\mu_0\omega} \left| \underline{t} \right|^2 \mathrm{Re}(\underline{k}_m) \left| \underline{E}_0 \right|^2 S \\
&= \frac{1}{2\mu_0\omega\delta} \frac{(2\delta\omega/c)^2}{1 + \left(1 + \dfrac{\omega\delta}{c} \right)^2} \left| \underline{E}_0 \right|^2 S.
\end{aligned}$$

Comme $\delta^2 = \dfrac{2}{\mu_0\gamma\omega}$, ces deux puissances sont égales. La puissance transmise par l'onde est entièrement dissipée par effet Joule dans le conducteur. Si le conducteur est parfait, ces deux puissances sont nulles, ce qui confirme le commentaire de la question précédente.

IV Dispersion dans le plasma interstellaire

1. a) L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit, en notation complexe, avec la convention de l'énoncé : $i\overrightarrow{k} \wedge \underline{\overrightarrow{B}} = \mu_0(\underline{\overrightarrow{j}} - i\varepsilon_0\omega\underline{\overrightarrow{E}})$, soit :

$$\underline{\overrightarrow{j}} = i\varepsilon_0 c^2 \left(\overrightarrow{k} \wedge \underline{\overrightarrow{B_0}} + \frac{\omega}{c^2}\underline{\overrightarrow{E_0}}\right) \exp\left(i\left(\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{r} - \omega t\right)\right).$$

b) L'équation locale de conservation de la charge s'écrit ici $\operatorname{div} \overrightarrow{j} = 0$ puisque le milieu reste localement neutre. En notation complexe, elle devient $i\overrightarrow{k} \cdot \underline{\overrightarrow{j}} = 0$: le vecteur $\underline{\overrightarrow{j}}$ est donc orthogonal à $\overrightarrow{k}$.

2. Les électrons étant non relativistes, la force magnétique est négligeable devant la force électrique et le champ électrique apparaît uniforme à l'échelle du déplacement des électrons (voir cours). L'équation du mouvement d'un électron s'écrit donc, en notation complexe : $-im\omega\underline{\overrightarrow{v}} = -e\underline{\overrightarrow{E}}$. Sachant que $\overrightarrow{j} = -n_0 e\overrightarrow{v}$, nous obtenons : $\underline{\overrightarrow{j}} = i\dfrac{ne^2}{m\omega}\underline{\overrightarrow{E}}$. La conductivité du plasma est donc égale à $\underline{\sigma} = i\dfrac{ne^2}{m\omega}$. Elle est imaginaire pure : le vecteur densité volumique de courant et le champ électrique sont en quadrature de phase, la puissance moyenne fournie par le champ au plasma est donc nulle (c'est normal car nous n'avons pris en compte aucun effet dissipatif dans l'équation du mouvement).

3. L'équation de Maxwell-Faraday donne, en notation complexe : $\underline{\overrightarrow{B}} = \dfrac{\overrightarrow{k} \wedge \underline{\overrightarrow{E}}}{\omega}$. En reportant cette expression dans la relation de la première question, nous obtenons :

$$\underline{\overrightarrow{j_0}} = i\varepsilon_0 c^2 \left(\overrightarrow{k} \wedge \left(\frac{\overrightarrow{k} \wedge \underline{\overrightarrow{E}}}{\omega}\right) + \frac{\omega}{c^2}\underline{\overrightarrow{E_0}}\right).$$

En développant le double produit vectoriel et en utilisant le fait que $\underline{\overrightarrow{E_0}}$ est orthogonal à $\overrightarrow{k}$, nous obtenons :

$$\underline{\overrightarrow{j_0}} = \frac{i\varepsilon_0}{\omega}\left(\omega^2 - c^2k^2\right)\underline{\overrightarrow{E_0}}.$$

4. Les deux équations reliant $\underline{\overrightarrow{j_0}}$ et $\underline{\overrightarrow{E_0}}$ donnent : $\underline{\sigma} = \dfrac{i\varepsilon_0}{\omega}\left(\omega^2 - c^2k^2\right)$, soit $\omega^2 = c^2\left(k^2 + K^2\right)$, avec $K = \sqrt{\dfrac{\mu_0 ne^2}{m}}$. Les vitesses de phase et de groupe sont : $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k} = c\sqrt{1 + \dfrac{K^2}{k^2}}$ et $v_g = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \dfrac{c}{\sqrt{1 + \dfrac{K^2}{k^2}}}$. Elles sont reliées par $v_\varphi \times v_g = c^2$, caractéristique d'une relation de dispersion de la forme ci-dessus.

5. Les trains d'ondes se propagent à une vitesse égale à la vitesse de groupe. L'instant de réception d'un train d'onde est donc : $t = \dfrac{L}{v_g}$. Nous en déduisons :

$$\delta t = L\left(\frac{1}{v_{g2}} - \frac{1}{v_{g1}}\right) = \frac{L}{c}\left(\sqrt{1 + \frac{\lambda_2^2 K^2}{4\pi^2}} - \sqrt{1 + \frac{\lambda_1^2 K^2}{4\pi^2}}\right).$$

Compte tenu de l'approximation suggérée par l'énoncé, cette durée se simplifie en :

$$\delta t = \frac{L}{c}\left(\frac{\lambda_2^2 K^2}{8\pi^2} - \frac{\lambda_1^2 K^2}{8\pi^2}\right) = \frac{LK^2}{8\pi^2 c}\left(\lambda_2^2 - \lambda_1^2\right).$$

6. L'application numérique donne $\delta t \leqslant 0,19$ ps.