CALCUL D'INCERTITUDES

I – Les erreurs de mesure

1) Modes de détermination d'une grandeur physique

Pour déterminer une grandeur physique, on peut :

- soit effectuer une mesure, c'est-à-dire comparer directement la grandeur physique à son unité. Par exemple, mesurer une longueur avec un mètre.
- soit utiliser une relation physique qui exprime la grandeur physique à déterminer en fonction d'autres grandeurs physiques. Par exemple, déterminer la vitesse moyenne d'un mobile à l'aide de la relation $v=d/t$. On utilise alors deux grandeurs physiques différentes pour obtenir la vitesse.

2) Les types d'erreurs de mesures

Quelque soit le mode de détermination d'un grandeur physique, on est donc toujours conduit à effectuer des mesures qui sont, par nature, nécessairement entachées d'erreurs ou plutôt d'incertitudes. On distingue :

- les erreurs systématiques :

Elles peuvent être dues aux appareils (décalage de zéro…) ou à la méthode de mesure (résistances internes pour les montages "tension vraie" et "courant vrai".

- les erreurs aléatoires :

Elles peuvent être dues aux appareils (frottement, bruit de fond électronique, température…), à une définition imprécise de la grandeur physique à mesurer (courant électrique instable, parallélisme ou orthogonalité médiocre) ou à l'expérimentateur (appréciation de lecture, mauvaise position de instruments de mesure…).

D'une manière générales, on peut dire que :
- les erreurs systématiques sont chiffrables, on peut donc corriger la grandeur physique facilement.
- les erreurs aléatoires ne sont pas chiffrables de manière précise, on peut au mieux estimer un ordre de grandeur, en valeur absolue, qui constitue justement ce que l'on appelle l'**incertitude** sur la grandeur physique.

II – Les erreurs de mesure

1) L'incertitude absolue (IA)

L'incertitude absolue sur une grandeur physique x, directement mesurée est la valeur absolue du plus grand écart estimé entre la valeur trouvée par la mesure x_m et la vraie valeur x_v (que l'on ignore). Elle s'écrit Δx et est toujours positive.

Alors on peut dire que $x_v \in [x_m - \Delta x , x_m + \Delta x]$, ce que l'on écrit symboliquement :

$$x_v = x_m \pm \Delta x$$

Exemple : on mesure un objet avec une règle graduée en mm. La mesure de x_m est entre les graduations 241 mm et 242 mm. On peut donc estimer la valeur x_m à 241,5 mm avec une incertitude de 0,5 mm : $x_v = 241,5 \pm 0,5$ mm

2) L'incertitude relative (IR)

L'incertitude relative sur une grandeur physique x est le rapport de l'IA Δx de cette grandeur physique et de la valeur absolue de la valeur trouvée par la mesure $|x_m|$.

$$IA = \frac{\Delta x}{|x_m|}$$

L'incertitude relative est aussi appelée précision et s'exprime souvent en %.

III – Calcul des IA et IR sur des grandeur physique non directement mesurées

Lorsqu'on mesure directement une grandeur physique, nos propres estimations ou bien les indications fournies par le constructeur de l'appareil de mesure, suffirent généralement pour évaluer l'IA ou l'IR sur la mesure effectuée.

Le problème qui se pose est donc l'évaluation de l'IR ou l'IA sur une grandeur physique non directement mesurée, c'est-à-dire obtenue par le calcul à l'aide d'un relation algébrique l'exprimant en fonction d'autres grandeur physique qui, elles, sont directement mesurées et dont on peut connaître l'IA ou l'IR. Exemple : mesure d'une vitesse moyenne v=d/t

1) Procédé général de calcul direct de l'IA

Soit G une grandeur physique dépendant d'autres grandeurs physiques L, M, T…
G=f(L,M,T…).
L'indice v indique les valeurs vraies, l'indice m indique les valeurs mesurées et l'indice c indique les valeurs calculées.

On peut estimer ΔG grace à un calcul différentiel :

$$dG = f_L{}'(L,M,T...)\,dL + f_M{}'(L,M,T...)\,dM + f_T{}'(L,M,T...)\,dT + ...$$
$$dG = \frac{\partial f(L,M,T...)}{\partial L}dL + \frac{\partial f(L,M,T...)}{\partial M}dM + \frac{\partial f(L,M,T...)}{\partial T}dT + ...$$

$$\Delta G \approx \left|\frac{\partial f(L,M,T...)}{\partial L}\right|\Delta L + \left|\frac{\partial f(L,M,T...)}{\partial M}\right|\Delta M + \left|\frac{\partial f(L,M,T...)}{\partial T}\right|\Delta T + ...$$

Il est en effet préférable de changer le signe "=" en "≈" car seule la première équation rigoureuse. Il faut aussi prendre les valeurs absolues des dérivées partielles car on pourrait sinon obtenir des incertitudes négatives.

Remarques : la valeur réelle de la grandeur physique n'est pas forcement compris dans l'intervalle $G_c \pm \Delta G$ compte tenu des approximations. Toutefois, elle s'en approche forcement. Cette méthode de calcul convient pour les sommes et/ou différences de produits et/ou quotients. Dans tous les autres cas, ce procédé devient vite très lourd et est à éviter.

Exemple : $z = -(1/2)gt^2 + v_0 t + z_0$

$$dz = -gt \cdot dt + v_0 \cdot dt + t \cdot dv_0 + dz_0$$
$$dz = (v_0 - gt) \cdot dt + t \cdot dv_0 + dz_0$$
$$\Delta z = |v_0 - gt| \Delta t + |t| \Delta v_0 + \Delta z_0$$

2) Procédés particuliers de calculs d'IR et d'IA

a) Application dans les cas où les grandeurs physiques sont des sommes et/ou différences de grandeurs physiques connues : l'IA est la somme des IA de chacun des membres de la somme/différence.

Ex : $M = 2m - 3m' \rightarrow \Delta M \approx 2\Delta m + 3\Delta m'$

b) Application dans les cas où les grandeurs physiques sont des produits et/ou quotient de grandeurs physiques au IR connues : l'IR est la somme des IR des chacun des membres du produit/quotient.

Ex : $F = Gmm'/r^2 \rightarrow \Delta F/F \approx \Delta G/G + \Delta m/m + \Delta m'/m' + 2\Delta r/r$

3) Procédé général de calcul direct de l'IR

Il existe un procédé général de calcul direct des IR qui présente l'avantage d'être dans certains cas plus facile à utiliser et plus rapide que le procédé général de calcul direct de l'IA. Ce procédé est conseillé pour les produit et/ou quotient de somme et/ou différentes. Il consiste à prendre le logarithme népérien de l'expression puis d'en calculer la différentielle (comme en III.1).

Exemple : $D = \dfrac{m - m'}{m'' - m'}$

$$\ln D = \ln(m - m') - \ln(m'' - m')$$
$$\frac{dD}{D} = \frac{d(m - m')}{m - m'} - \frac{d(m'' - m')}{m'' - m'}$$
$$\frac{dD}{D} = \frac{d(m - m')}{m - m'} - \frac{d(m'' - m')}{m'' - m'} \Leftrightarrow \frac{dD}{D} = \frac{dm}{m - m'} - \frac{dm'}{m - m'} - \frac{dm''}{m'' - m'} + \frac{dm'}{m'' - m'}$$

$$\frac{dD}{D} = \frac{dm}{m-m'} + dm'\left(\frac{1}{m''-m'} - \frac{1}{m-m'}\right) - \frac{dm''}{m''-m'}$$
$$\frac{\Delta D}{D} \approx \frac{\Delta m}{m-m'} + \Delta m'\left(\frac{1}{m''-m'} - \frac{1}{m-m'}\right) + \frac{\Delta m''}{m''-m'}$$

Cas particulier : produit et quotient direct de grandeurs physiques.

$$G = \frac{x}{yz^2} \Rightarrow \frac{\Delta G}{G} = \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta y}{|y|} + 2\frac{\Delta z}{|z|}$$

4) Conseils pratiques

Les incertitude sont des approximations et donc il n'est pas nécessaire de garder des chiffres significatifs. De plus, il est logique d'écrire les grandeurs physiques avec le même nombre de décimales que l'incertitude.

Exemple :

t = 135,217s et Δt = 4,5s > On écrit t = 135,2 ± 4,5s