

EXERCICE E201 – VIE D'UNE GOUTTE DE PLUIE

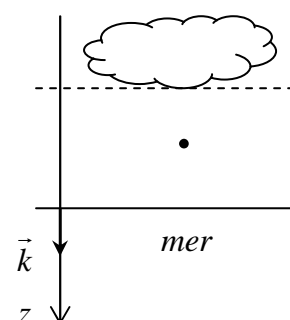
Dans tout l'exercice, on demande expressément de ne pas inventer de notations et d'exprimer les grandeurs physiques exclusivement en fonction des paramètres connus du problème (données physiques, vecteurs, axes...). Une exception sera faite pour les masses et volumes.

Dans les parties 1 et 2, une goutte d'eau sera assimilée à un corps sphérique indéformable de rayon R , de volume V et de densité d .

Attention : dans chaque question TOUS les mots comptent et on demande une réponse précise.

PARTIE 1 – Etude de la chute d'une goutte de pluie dans l'air

On s'intéresse au trajet d'une goutte de pluie (composée uniquement d'eau pure) dans l'atmosphère. A très haute altitude (on prendra arbitrairement une altitude $h = 100$ km) et à un instant $t_0=0$ s, une goutte d'eau est engendrée par un nuage et entame une chute jusqu'à la surface d'une mer calme située au dessous. On suppose une absence totale de vent et on admet donc que la chute est verticale selon un axe z orienté vers le bas dont l'origine est prise au niveau de la mer.



1) a. Quelle est la seule force fondamentale motrice à laquelle est soumise la goutte d'eau à $z_0 = z(t=0) = -10^5$ m ? L'exprimer vectoriellement en fonction des paramètres connus du problème pour tout $z(t)$ tel que $-10^5 < z(t) < 0$.

b. Exprimer cette force en fonction du champ de pesanteur $\vec{g}(z) = \frac{GM_T}{r^2(z)} \vec{k}$. Que représente $r(z)$ dans notre repère en fonction de paramètres connus ? Calculer l'intensité du champ de pesanteur $\vec{g}_0 = \vec{g}(z=0)$ et $\vec{g}_{\text{image}} = \vec{g}(z=-10^5)$.

On cherche à trouver la vitesse qu'aura la goutte au contact de la mer. On ne négligera aucune force. L'intensité de la force de frottement visqueux qui est rigoureusement de la forme $f = 0,5 \cdot C_x \rho_{\text{air}} S v^2$ sera modélisée par une force simple de type $f = k_1 v$

2) a. Etablir l'équation différentielle (E) régie par la norme de la vitesse au cours de la chute en faisant l'approximation que $\vec{g}(t)$ est constant (on le notera \vec{g}_m).

b. On sait que la goutte admet une vitesse limite après un certain temps. Déterminer simplement l'expression de cette vitesse limite notée v_{lim} en s'aidant de (E).

c. Intégrer (E) et démontrer mathématiquement l'existence de cette vitesse limite. Tracer l'allure de la courbe du graphe $v = f(t)$.

3) a. Etant donné que l'on s'intéresse à la vitesse limite de la goutte au niveau de la mer, quelle valeur de g_m a-t-on intérêt à choisir entre g_0 et g_{nuage} ? Justifier brièvement.

b. Calculer la valeur de v_{lim} .

Données :

Constante de gravitation universelle : $G = 6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$

Masse de la Terre : $M_T = 5,977 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Rayon moyen de la Terre : $r_T = 6376 \cdot 10^3 \text{ m}$

Densité de l'air : $d_{air} \approx 0$

Densité de l'eau : $d = 1$

Volume moyen d'une goutte d'eau : $V = 5 \text{ mL}$

Coefficient de frottement visqueux goutte/air : $k_1 = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$

PARTIE 2 – Etude du trajet d'une goutte de pluie dans la mer

On s'intéresse ici au parcours de la goutte d'eau après son contact avec la surface de la mer avec une vitesse que l'on supposera égale à $v_{lim} = 20 \text{ ms}^{-1}$ quel que soit le résultat trouvé précédemment. On utilisera le même repère que dans la partie précédente et les grandeurs physiques seront notées avec des primes. On suppose ici que l'on est en régime laminaire et donc que l'intensité de la force de frottement visqueux est de la forme $f' = \eta \phi v$.

4) a. Etablir une nouvelle équation différentielle (F_0) régie par la norme de la vitesse de la goutte $v'(t)$ dans l'eau. Justifier l'indice "0" du nom de cette équation.

b. Intégrer l'équation (F_0) puis donner l'allure du graphe de $v' = f(t)$.

c. Quelle est la vitesse finale v'_f de la goutte ?

5) Le temps après lequel la goutte a atteint sa vitesse finale est inconnu, on ne peut donc pas trouver η , seule donnée inconnue du problème. Déterminer l'expression de la viscosité η en fonction de t_f , temps après lequel la goutte à atteint 99 % de sa vitesse finale.

Données :

On suppose que toutes les grandeurs sont connues à l'exception de η que l'on cherchera dans la question 5.

PARTIE 3 – Etude d'une goutte d'eau d'une éclaboussure

Un poisson saute en dehors de l'eau. On étudie ici une goutte, assimilée à un point matériel de masse m , provenant de l'éclaboussure produite.

Déterminer la hauteur maximale que peut atteindre une goutte quelconque au sortir de l'eau en fonction de sa vitesse initiale et de g_0 en utilisant une loi de conservation.