Le fabuleux destin d'un cachet d'aspirine égaré

Sébastien Bruneau

Acadomia / Spésup
Vendredi 23 avril 2010 / 14h-18h
Examen blanc - programme MPSI

La plupart des questions sont indépendantes. Toutefois, des éléments nécessaires à la résolution de certaines questions peuvent se situer dans d'autres parties. Il est conseillé de lire la totalité du sujet à l'avance.
Il sera porté une attention particulière sur la clarté des schéma et des réponses données. Toute donnée qui aurait été oubliée dans l'énoncée est égale à 1, dans le système d'unités du système international. En cas d'erreur supposée dans l'énoncé, il est demandé de l'expliciter sur la copie, et de formuler les éventuelles hypothèses qui ont été amenées à prendre.

---

1 Etude d'une chute libre

1.1 Le cachet à la loupe

On considère un cachet d'aspirine de forme cylindrique, de rayon R, de hauteur h, et de masse volumique ρ telle que :

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{30R} \right) \tag{1}$$

où r et la distance au centre du cachet.

1. Donner l'expression de la masse totale m du cachet.
2. Par des considérations de symétries, déterminer la position du centre de masse G du cachet. Le représenter sur un schéma.
3. On rappelle la définition mathématique du centre de masse :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\iiint_V \rho(r) \cdot \overrightarrow{OM} \cdot d\tau}{\iiint_V \rho(r) \cdot d\tau} \tag{2}$$

   où M est un point à une distance r du centre du cachet. Retrouver le résultat de la question précédente par le calcul.

Données : En coordonnées cylindriques, $d\tau = r \cdot dr \cdot dz \cdot d\theta$

1.2 Chute libre à haute altitude

Le cachet d'aspirine est perdu par un parachutiste à une altitude H. Il tombe en chute libre, avec une vitesse initiale $\vec{v_0}$ vecticale de $10 m.s^{-1}$. Le vent est considéré comme nul.

1. On assimile dans cette sous-partie le cachet à un point matériel de masse m. Cette considération semble-t-elle justifiée ?
2. Rappeler l'expression de la force qu'exerce la Terre sur le cachet, en fonction de M_T, la masse de la Terre, R_T, le rayon moyen de la Terre, G, la constante de gravitation universelle et H.
3. Calculer l'intensité de cette force pour $H = 3000\ m$, $H = 2000\ m$ et $H = 1000\ m$
4. Calculer l'erreur relative que l'on commet, lorsque l'on assimile la force calculée précédemment, au poids $\vec{P}$, à $H = 1000 m$.

Données numériques : $M_T = 5,97 \cdot 10^{24} kg$, $R_T = 6360 km$, $m = 1 g$, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$, $g = 9,81 m \cdot s^{-2}$

1.3 Chute libre à basse altitude

Pour une altitude H suffisamment faible, on considèrera que l'action de la Terre sur le cachet peut être modélisée par le poids. La vitesse du cachet arrivé à l'altitude H est notée $\vec{v_0}$. Lors de la chute, le cachet est soumis à une force de frottement fluide, de sens opposé à la vitesse, et de norme proportionnelle à la vitesse, par un facteur k.

1. Préciser l'unité de k.
2. Au vu des données numériques, quelle force peut-on négliger dans cette étude ? Expliciter son expression.
3. Parmi les forces mises en jeu dans ce problème, quelles sont celles qui sont conservatives ?
4. Donner le signe du travail de chacune des forces durant le mouvement. Justifier.
5. Etablir l'équation différentielle (E) vérifiée par $\vec{v}$.
6. On admet que la norme de la vitesse tend vers une vitesse limite v_{lim} à basse altitude. Sans résoudre (E), donner l'expression de v_{lim}.
7. Résoudre (E) et retrouver l'expression de v_{lim}.

Données numériques : $\rho_{air} = 1,8 kg \cdot m^{-3}$

2 Etude mécanique au sol

2.1 Atterissage

Le cachet arrive sur la tranche, sur un sol incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale, animé d'une vitesse de norme v_{lim}. Le cachet continue sa course en roulant, sans glissement, le long du plan incliné. On admet qu'au moment de l'atterissage, le cachet conserve la totalité de son énergie cinétique.

1. Si le cachet est considéré comme indéformable, la dernière hypothèse semble-t-elle légitime ?
2. On considère encore une fois le cachet comme un point matériel. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, donner une expression de la norme de la vitesse v_{Cfin} du cachet, au pied du plan incliné, en fonction de v_{lim}, m, α, et L, la longueur parcourue sur le plan incliné.

2.2 Cinématique du roulement

On considère cette fois le cachet roulant sur sa tranche. On se place pour l'instant dans un système de coordonnées cylindriques, d'origine O, centre du cachet, et d'axe Oz, orthogonal à la face latérale du cachet.

1. Réaliser un schéma faisant apparaître le repère, notamment l'axe Oz, qui sera choisi de manière à pouvoir écrire un vecteur rotation $\vec{\omega}$ de norme positive.
2. Rappeler la définition d'un référentiel galiléen. Le référentiel R_T de la Terre est-il galiléen ?

3. Un référentiel R_C centré sur le cachet, utilisant les coordonnées polaires, est-il galiléen ?
4. Dans le référentiel R_C, exprimer la vitesse $\vec{v_A}$, d'un point A, situé à la périphérie du cachet et initialement en contact avec le sol, en fonction de R et ω.
5. Déterminer ω, en fonction de x, position du cachet sur le plan incliné par rapport à son point d'atterissage, et R.
6. Dans le réfétentiel R_T, donner la relation liant $\vec{v'_A}$, vitesse du point A dans R_T, $\vec{v_A}$ et $\vec{v_C}$, vitesse du centre du cachet dans R_T.
7. Dans le référentiel R_T, trouver l'expression de $\vec{v'}_{Afin}$, en fonction des données du problème.

2.3 Moments

1. Calculer la valeur le moment d'inertie J du cachet.
2. On rappelle l'expression du moment cinétique L en un point O :

$$\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge \vec{p} \tag{3}$$

   où $\vec{p}$ est la quantité de mouvement $m\vec{v}$ au point M. Donner l'expression de L au centre du cachet, dans le référentiel R_C, à la fin du plan incliné.
3. Calculer les valeur du moment de chacune des forces extérieures en O.
4. Ecrire le théorème du moment cinétique en O.

2.4 Frottements statiques

A la sortie du plan incliné, le cachet fini par tomber sur un autre plan incliné, faisant un angle β par rapport au sol. Le cachet tombe cette fois sur une de ses faces, et reste immobile.

1. Rappeler la définition du coefficient de frottement statique, noté ici f. Donner l'unité de f.
2. Déterminer dans le cas présent la valeur de f en fonction des données du problème, lorsque l'on est à la limite de l'équilibre.
3. La valeur de f changera-t-elle si $beta$ varie ? si m varie ? si la nature des matériaux varient ?
4. Décrire l'évolution du système lorsque l'on exerce une pression de plus en plus importante à l'arrière du cachet

3 Etude thermodynamique

3.1 Dissolution du cachet

Une fois poussé, le cachet termine sa course dans une cannette contenant quelques gouttes d'eau. Un caillou vient obstruer l'entrée. On assiste à un phénomène d'effervescence du cachet au contact de l'eau. Le gaz formé ne peux s'échapper de la cannette.

1. Lors de l'effervescence, quel gaz est émis par le cachet ?
2. On assimile ce gaz à un gaz parfait. Rappeler la définition d'un gaz parfait.
3. Déterminer le nombre de moles n_i de gaz contenues dans la cannette, initialement ouverte, avant l'arrivée du cachet.
4. Déterminer le nombre de moles n_a de gaz contenues dégagées par la dissolution totale du comprimé, sachant que 1% des molécules contenues dans le cachet sont transformées en gaz.
5. Déterminer la pression dans la cannette après l'effervescence, en fonction de $n = n_i + n_a$, V, volume de la cannette, R et T, température après l'effervescence.
6. Redémontrer les expressions de C_P et C_V pour un gaz parfait, en fonction de n, R et $\gamma = C_P/C_V$.
7. Redémontrer la loi de Laplace pour une transformation adiabatique :

$$PV^\gamma = constante \tag{4}$$

8. Peut-on considérer la transformation due à l'effervescence du gaz comme adiabatique ? Justifier brièvement.
9. On admet que dans les conditions de la transformation, cette dernière se déroule de façon adiabatique. Exprimer la pression après l'effervescence, en fonction de P_{atm}, T_{air} et T.
10. Tracer la portion de courbe correspondant à cette transformation, dans un diagramme de Clapeyron $P = f(V)$.

Données numériques : $m = 1g$, $M = 181g \cdot mol^{-1}$, $P_{atm} = 10^5 Pa$, $V = 40cL$, $T_{air} = 298K$

3.2 Détente du gaz

Un ballon de baudruche est placé sur l'ouverture de la cannette. Le caillou est rapidement dégagé et le gaz se détent dans le ballon. On admet que le ballon permet de revenir à une pression équivalente à $1,01 P_{atm}$

1. Cette transformation est-elle équivalente à une détente de Joule Gay-Lussac ?
2. Déterminer le nouveau volume total, après la détente, considérée comme isotherme.
3. Tracer approximativement la nouvelle portion de droite dans le diagramme de Clapeyron.
4. Avec le temps, le ballon devient perméable, et laisse s'échapper une certaine quantité de gaz. La gaz cesse de s'échapper une fois la pression atmosphérique atteinte. En première approximation, on considère la transformation comme isochore et isotherme. Calculer la quantité de gaz échappée du système.
5. Pourquoi ne peut-on pas faire figurer cette transformation dans un diagramme de Clapeyron ?
6. Semble-t-il thermodynamiquement possible de revenir au système initial par une transformation quelconque ?
7. Semble-t-il physiquement/chimiquement possible de revenir au système initial par une transformation quelconque ?

3.3 Question bonus

On définit l'énergie libre d'un système F par :

$$F = U - TS \tag{5}$$

1. A partir des principes de la thermodynamique, exprimer la différentielle dF en fonction de P, V, S, T et/ou leurs différentielles.
2. Vérifier qu'à température constante, l'énergie libre est égale au travail des forces de pression.
3. Redémontrer la relation de Maxwell :

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V \tag{6}$$