

Vibrations et Ondes

UE Phy231
2006-2007

Eric Liatard et François Montanet
LPSC/UJF
liatard@lpsc.in2p3.fr, montanet@lpsc.in2p3.fr

Table des matières

1	LES OSCILLATEURS MECANIQUES	5
1.1	Définitions	5
1.2	L'oscillateur harmonique libre sans amortissement	6
1.3	L'oscillateur harmonique libre amorti	13
1.4	L'oscillateur harmonique amorti en régime forcé	15
1.5	Oscillateurs harmoniques couplés	20
2	LES ONDES MECANIQUES	29
2.1	Caractéristiques des ondes mécaniques	29
2.2	Analyse de Fourier d'un mouvement ondulatoire	32
2.3	Vitesse de groupe	34
2.4	Propagation le long d'une chaîne infinie d'oscillateurs couplés	36
2.5	Equation de propagation dans un milieu continu	41
2.6	Surfaces d'ondes	43
2.7	Les ondes sonores	45
2.8	Réflexion et transmission	52
2.9	Ondes stationnaires	53
2.10	Bibliographie	56

Chapitre 1

LES OSCILLATEURS MECANIQUES

1.1 Définitions

1.1.1 Oscillateurs

Un oscillateur est un système quelconque possédant une position d'équilibre stable autour de laquelle il oscille lorsqu'on l'en écarte. Nous ne nous intéresserons dans ce cours qu'aux oscillateurs mécaniques pour lesquels la force de rappel qui tend à ramener le système à sa position d'équilibre est d'origine mécanique (pesanteur pour un pendule, élasticité pour une masse suspendue à un ressort...). Il existe cependant d'autres types d'oscillateurs, comme les oscillateurs électromagnétiques (charges dans un circuit LC, électron soumis à une onde électromagnétique...) tous ces systèmes obéissent à des équations différentielles linéaires très semblables.

1.1.2 Degrés de liberté d'un oscillateur

Un système possède autant de degrés de liberté qu'il faut de coordonnées spatiales pour définir sa position. Un point dans l'espace possède trois degrés de liberté, tandis qu'un solide indéformable en possède six : trois pour définir la position de son centre de gravité et trois pour fixer sa position autour de ce centre de gravité.

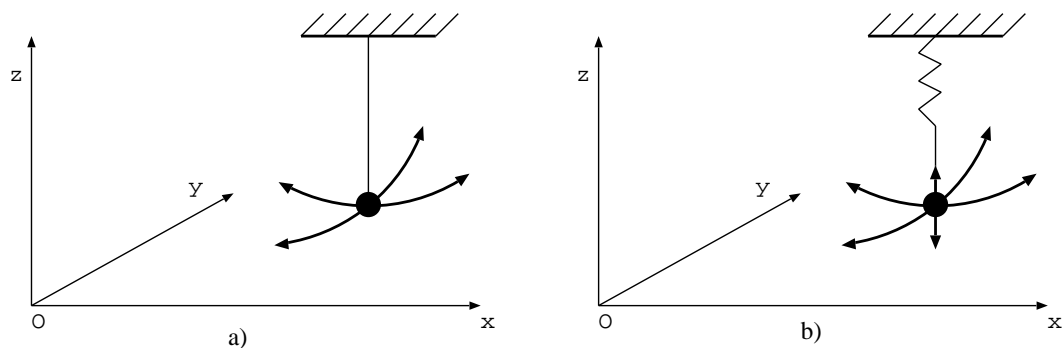


FIG. 1.1 – Pendules à deux (a) ou trois (b) degrés de liberté.

Un oscillateur possède autant de types d'oscillation qu'il a de degrés de liberté. Par exemple, la masse ponctuelle suspendue à un fil inextensible de la figure 1.1a possède deux degrés de liberté donc deux types d'oscillation : un dans le plan xOz et un dans le plan yOz ; tout mouvement d'oscillation de ce pendule sera une superposition de ces deux modes d'oscillation. Si on remplace le fil par un ressort (fig. 1.1b) un troisième mode d'oscillation selon l'axe Oz apparaît. Nous n'étudierons en détail que les systèmes à un seul degré de liberté.

1.1.3 L'oscillateur harmonique

La somme des forces \vec{F} auxquelles est soumis un oscillateur s'annule à sa position d'équilibre. Pour un oscillateur à un seul degré de liberté x , si \vec{F} est telle que sa composante F dans la direction du mouvement est proportionnelle à l'écart $(x - x_0)$ par rapport à la position d'équilibre x_0 définie par $F(x_0) = 0$ alors l'oscillateur est **harmonique** et on a :

$$F(x) = -K(x - x_0) \quad (1.1)$$

Remarque importante : Le signe $-$ dans l'équation 1.1 indique que la force \vec{F} s'oppose au mouvement, c'est une **force de rappel**; sans force de rappel il n'y a pas d'oscillation.

D'une manière plus générale, si l'oscillateur n'est pas harmonique, comme c'est souvent le cas, on peut toujours développer $F(x)$ en série de Taylor au voisinage de sa position d'équilibre x_0 :

$$F(x) = F(x_0) + (x - x_0)F'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2}F''(x_0) + \dots$$

Le premier terme $F(x_0)$ est nul par définition de la position d'équilibre et, pour $(x - x_0)$ assez petit, c'est à dire très près de la position d'équilibre, le développement peut être arrêté au premier ordre et nous avons en première approximation $F(x) = -K(x - x_0)$. Où K est une constante s'identifiant à $-F'(x_0)$. C'est l'**approximation harmonique** de l'oscillateur, valable seulement pour de très petites oscillations. Les termes d'ordres supérieurs que l'on a négligés, appelés termes anharmoniques prennent d'autant plus d'importance que l'on s'éloigne de la position d'équilibre de l'oscillateur. Nous nous limiterons par la suite à l'approximation harmonique à l'exception d'un exemple montrant la complexité des oscillateurs anharmoniques.

1.2 L'oscillateur harmonique libre sans amortissement

1.2.1 Définition

Un oscillateur harmonique libre sans amortissement est un système soumis uniquement à une force de rappel proportionnelle à l'écart par rapport à sa position d'équilibre sans aucune autre force d'amortissement ou d'excitation. C'est donc un système idéal, qui en mécanique n'a pas de réalité physique mais qui peut constituer une bonne approximation de systèmes où les forces de frottement sont faibles.

1.2.2 Exemples d'oscillateurs harmoniques

Système masse-ressort horizontal

A l'équilibre le ressort est non déformé et possède une longueur l_0 (figure 1.2).

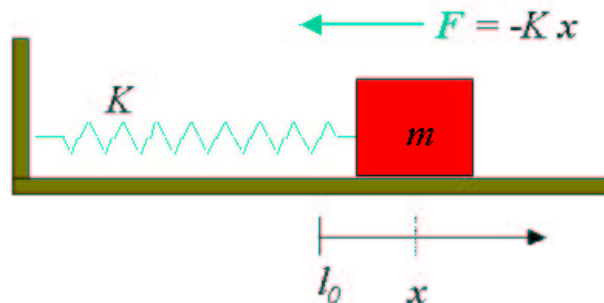


FIG. 1.2 – *Système masse-ressort horizontal.*

Hors d'équilibre le ressort a une longueur l . La position de la masse suivant l'axe du ressort est repérée par une abscisse x correspondant à l'écart à sa position d'équilibre ou encore à l'allongement du ressort $x = l - l_0$.

Dans la limite des petits déplacements on observe que la force de rappel est opposée à la déformation et reste proportionnelle à l'allongement du ressort. La force suit la loi de Hook : $F = -Kx$, où K est la raideur du ressort.

Pendule pesant

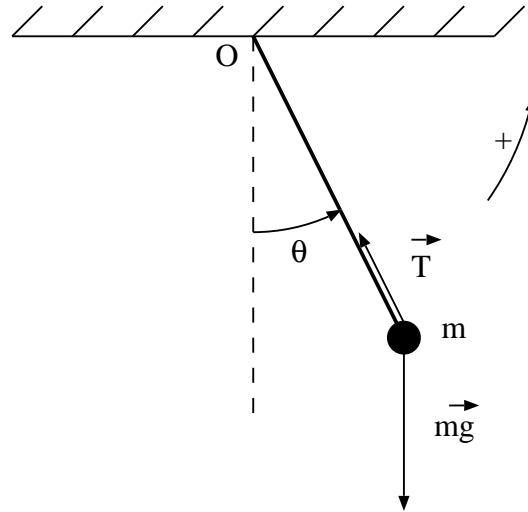


FIG. 1.3 – Pendule pesant.

Le pendule est constitué d'une masse m reliée à un fil (ou une tige rigide) de longueur l fixé par une extrémité à un support rigide (figure 1.3). Lorsque le fil reste tendu la masse décrit un arc de cercle sous l'action de son poids \vec{P} et de la tension \vec{T} du fil. La position de la masse est donnée par l'angle θ que fait le fil avec la verticale.

A l'équilibre le fil est vertical et hors d'équilibre la masse est rappelée vers l'équilibre par la composante horizontale de la tension.

Dans les limites des petites oscillations $\cos \theta \approx 1$ et $\sin \theta \approx \theta$, la masse décrit un mouvement quasi horizontal.

La tension verticale équilibre le poids :

$$P = mg = T \cos \theta \approx T$$

La masse est rappelée vers l'équilibre par la tension horizontale :

$$F = T_x = -T \sin \theta = -T x/l \approx -mgx/l$$

Soit, comme pour le ressort : $F = -Kx$ avec $K = mg/l$

1.2.3 Conservation de l'énergie

Soit un oscillateur de masse m oscillant selon x autour de la position x_0 sous l'action de la force de rappel $F(x) = -K(x - x_0)$. On peut calculer son énergie potentielle en fonction de la variable $X = x - x_0$ qui représente l'écart par rapport à la position d'équilibre :

$$E_p = - \int F(X).dX = \int KX dX = \frac{1}{2}KX^2 + C^{te}$$

Cette énergie potentielle est définie à une constante près, qui peut être prise égale à zéro en prenant l'origine des énergies potentielles en $x = x_0$, soit :

$$E_p = \frac{1}{2}KX^2$$

L'énergie cinétique peut s'écrire :

$$E_c = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2}m \left(\frac{d(x - x_0)}{dt} \right)^2$$

Si l'oscillateur n'est soumis à aucune autre force, on peut écrire la conservation de l'énergie totale, en fonction de la variable $X = x - x_0$, sous la forme :

$$E = \frac{1}{2}KX^2 + \frac{1}{2}m \left(\frac{dX}{dt} \right)^2 = C^{te} \quad (1.2)$$

Si on trace l'énergie potentielle E_p en fonction de X on remarque que (figure 1.4) le système évolue entre les points A , O et A' sur la parabole d'équation $E_p = \frac{1}{2}KX^2$:

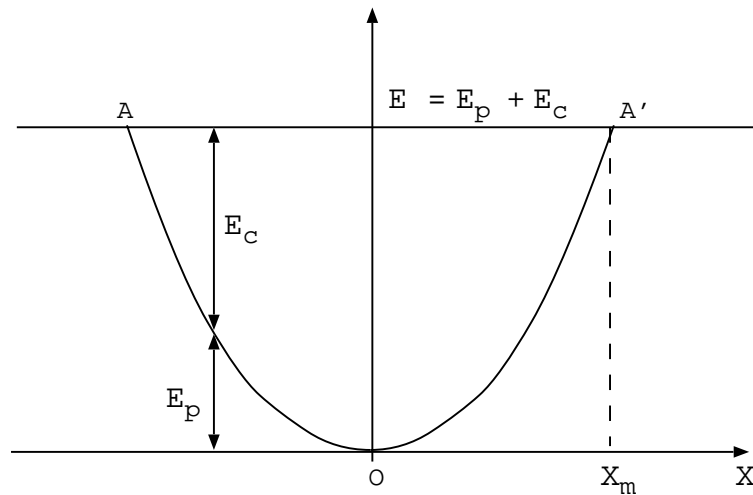


FIG. 1.4 – *Energies potentielle et cinétique d'un oscillateur harmonique libre en fonction de l'écart X par rapport à sa position d'équilibre.*

– En A et A' on a $X = X_m$, l'énergie potentielle est maximum et l'énergie cinétique nulle :

$$E_{p,max} = \frac{1}{2}KX_m^2 = E \Rightarrow X_m = \sqrt{\frac{2E}{K}}$$

– En O , toute l'énergie du système est sous forme cinétique :

$$E_{c,max} = \frac{1}{2}mv_m^2 = E \Rightarrow v_m = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

On peut en déduire une relation simple entre l'amplitude X_m du déplacement et l'amplitude v_m de la vitesse :

$$E = \frac{1}{2}mv_m^2 = \frac{1}{2}KX_m^2 \Rightarrow v_m = \sqrt{\frac{K}{m}}X_m \quad (1.3)$$

1.2.4 Equation du mouvement

En dérivant l'équation 1.2 on a :

$$0 = KX \left(\frac{dX}{dt} \right) + m \left(\frac{d^2X}{dt^2} \right) \left(\frac{dX}{dt} \right)$$

On peut simplifier en divisant par dX/dt (on peut exclure le cas $dX/dt = 0$ qui correspond à un système immobile à sa position d'équilibre), on trouve ainsi l'équation du mouvement :

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{K}{m}X = 0 \quad (1.4)$$

C'est l'équation générale de l'oscillateur harmonique libre sans amortissement, qui peut aussi s'écrire, en posant $\omega = \sqrt{K/m}$:

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \omega^2X = 0$$

La solution générale de cette équation différentielle du second ordre à coefficients constants est :

$$X = X_m \sin(\omega t - \phi) \quad (1.5)$$

$X_m = \sqrt{2E/K}$ est l'amplitude de l'oscillation. Cette amplitude ne dépend que de l'énergie totale et de la constante de rappel de l'oscillateur, ce résultat reste valable pour tout type d'oscillateur harmonique libre sans amortissement.

$\omega = \sqrt{K/m}$ est la pulsation. C'est aussi le rapport entre les amplitudes du déplacement et de la vitesse (relation 1.3)

ϕ est la phase à l'origine, qui dépend uniquement des conditions initiales du mouvement.

En posant $\varphi = \phi + \pi/2$, l'équation 1.5 peut également se mettre sous la forme :

$$X = X_m \cos(\omega t - \varphi) \quad (1.6)$$

On peut également établir l'équation du mouvement à partir de la relation de la dynamique :

$$F(x) = -K(x - x_0) = m \frac{d^2(x - x_0)}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2(x - x_0)}{dt^2} + \frac{K}{m}(x - x_0) = 0$$

1.2.5 Expression de l'énergie totale

Compte tenu de la relation 1.3 entre l'énergie totale, l'amplitude et la vitesse on a :

$$E = \frac{1}{2}K X_m^2 = \frac{1}{2}mv_m^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 X_m^2 \quad (1.7)$$

L'énergie totale d'un oscillateur harmonique est proportionnelle au carré de l'amplitude et de la pulsation.

1.2.6 Exemple : oscillations après un choc

Considérons un solide de masse M relié à une paroi rigide par un ressort de raideur K et pouvant se déplacer sans frottement selon l'axe horizontal Ox (figure 1.5). A l'instant $t = 0$ ce solide est percuté par une masse m se déplaçant à la vitesse $\vec{v} = -v_0\vec{u}_x$. Le choc est parfaitement mou, de sorte que m reste collée à M après le choc.

La relation de la dynamique appliquée au système formé par $M + m$ après le choc nous donne :

$$(m + M) \frac{d^2x}{dt^2} = -Kx \Rightarrow x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

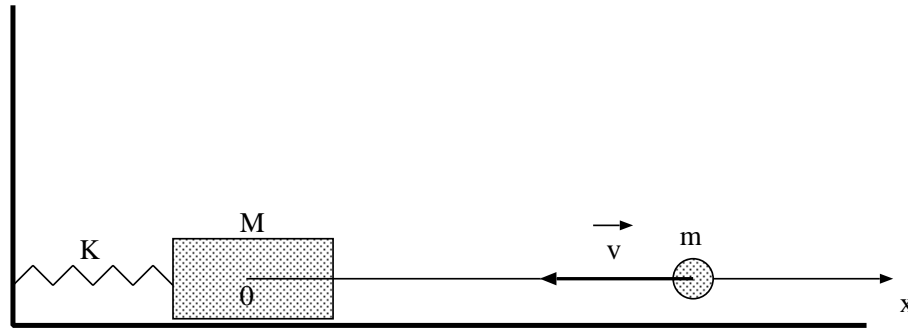


FIG. 1.5 – La masse M , mise en mouvement par collision avec la masse m , peut se déplacer sans frottement selon l'axe horizontal Ox .

avec $\omega = \sqrt{K/(m+M)}$

déterminons les constantes A et φ à partir des conditions initiales :

$$\begin{aligned} x(t=0) &= 0 \\ \frac{dx}{dt}\Big|_{(t=0)} &= V \end{aligned} \quad (1.8)$$

La conservation de la quantité de mouvement permet de trouver la vitesse \vec{V} du solide $(M+m)$ juste après le choc :

$$m\vec{v} = (m+M)\vec{V} \Rightarrow \vec{V} = -\frac{mv_0}{m+M}\vec{u}_x$$

on a donc :

$$\begin{aligned} 0 &= A \cos \varphi \Rightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{2} \\ -\frac{m}{m+M}v_0 &= -A\omega \sin \varphi \Rightarrow A = \pm \frac{mv_0}{(m+M)\omega} = \pm \frac{mv_0}{\sqrt{K(m+M)}} \end{aligned}$$

Si on considère l'amplitude comme une grandeur positive, on ne retiendra que la solution positive, correspondant à $\varphi = \pi/2$. D'où :

$$x(t) = \frac{mv_0}{\sqrt{K(m+M)}} \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

On peut vérifier que l'amplitude du mouvement est bien donnée par $A = \sqrt{2E/K}$ ou E est l'énergie mécanique totale du système, égale dans ce cas à :

$$E = \frac{1}{2}(m+M) \left(\frac{dx}{dt} \right)_{t=0}^2 = \frac{1}{2}(m+M) \left(\frac{mv_0}{m+M} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{m^2}{m+M} v_0^2$$

Attention : dans ce choc inélastique l'énergie cinétique n'est pas conservée et on n'a pas le droit de considérer que l'énergie mécanique totale du système est égale à l'énergie cinétique initiale $mv_0^2/2$, en effet, une partie de cette énergie sera dissipée sous forme de chaleur au cours du choc.

1.2.7 Notation complexe

L'utilisation des nombres complexes facilite souvent les calculs en physique, en particulier pour l'étude des oscillateurs.

Rappelons qu'un nombre complexe $\tilde{z} = a + ib$ représenté dans le plan complexe par le point M de coordonnées (a, b) (figure 1.6) a pour module :

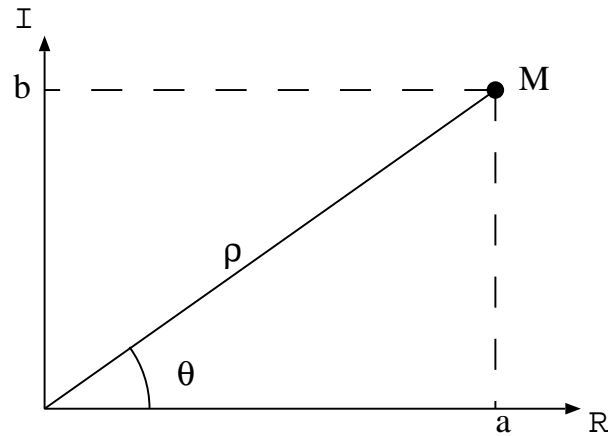


FIG. 1.6 – Représentation d'un nombre complexe dans le plan complexe.

$$|\tilde{z}| = \sqrt{\tilde{z}\tilde{z}^*} = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

et pour argument :

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

où $\tilde{z}^* = a - ib$ représente le complexe conjugué de \tilde{z} .

\tilde{z} peut donc aussi s'écrire :

$$\tilde{z} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Appliquons les résultats précédents au mouvement d'un oscillateur harmonique, qui peut s'écrire $x = A\cos(\omega t - \varphi)$. On peut considérer x comme la partie réelle du nombre complexe :

$$\tilde{x} = A[\cos(\omega t - \varphi) + i\sin(\omega t - \varphi)] = Ae^{i(\omega t - \varphi)} = \tilde{A}e^{i\omega t}$$

où $\tilde{A} = Ae^{-i\varphi}$ est une amplitude complexe.

x est solution de l'équation différentielle $d^2x/dt^2 + \omega^2x = 0$, vérifions que \tilde{x} l'est aussi :

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= Ae^{i(\omega t - \varphi)} \\ \frac{d\tilde{x}}{dt} &= i\omega Ae^{i(\omega t - \varphi)} = i\omega\tilde{x} \\ \frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} &= i^2\omega^2 Ae^{i(\omega t - \varphi)} = -\omega^2\tilde{x}\end{aligned}$$

L'équation $d^2\tilde{x}/dt^2 + \omega^2\tilde{x} = 0$ est donc satisfaite. On remarquera au passage que la dérivée de \tilde{x} s'obtient très simplement en multipliant \tilde{x} par $i\omega$ et donc la primitive en divisant \tilde{x} par $i\omega$.

La solution exprimée sous forme complexe \tilde{x} est donc plus générale et peut être utilisée, mais en se souvenant que la solution "réelle", qui a un sens physique, correspond à la partie réelle de \tilde{x} .

1.2.8 Représentation de Fresnel

La quantité $x = x_m \cos(\omega t - \varphi)$ peut également être vue comme la projection sur l'axe Ox d'un vecteur \vec{OA} , de norme x_m faisant avec cet axe un angle $\alpha = \omega t - \varphi$. Le "vecteur tournant" \vec{OA} est appelé **représentation de Fresnel** de la fonction $x = x_m \cos(\omega t - \varphi)$. Cette représentation géométrique est très utile dans certains problèmes et tout particulièrement lorsqu'on veut comparer ou composer des mouvements harmoniques avec des phases différentes, comme le montre la figure 1.7.

On voit sur cette figure que la fonction $x_1 = A \cos \omega t$, représentée par le vecteur \vec{OA} est en avance de phase par rapport à la fonction $x_2 = B \cos(\omega t - \varphi)$, représentée par le vecteur \vec{OB} de la quantité φ .

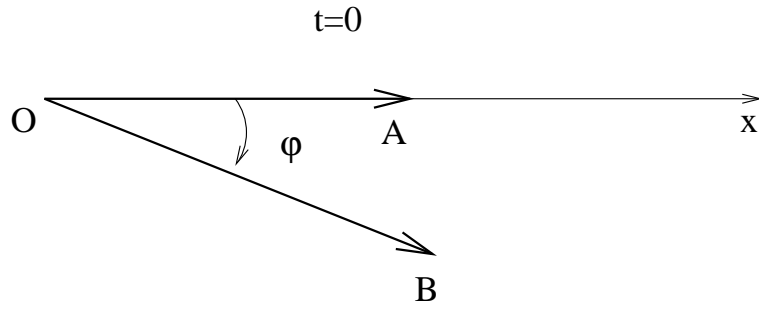


FIG. 1.7 – Représentation de Fresnel des fonctions $x_1 = A \cos \omega t$ et $x_2 = B \cos(\omega t - \varphi)$. Pour simplifier on se place en général à $t = 0$.

1.2.9 Exemple d'oscillateur anharmonique

Considérons le pendule simple de la figure 1.3, constitué d'une masse m suspendue à un fil de longueur l . La rotation du pendule autour du point O est repérée par l'angle θ . Appliquons l'équation de la dynamique à ce système en rotation autour du point O , dont le moment d'inertie est $I = ml^2$ si on néglige la masse du fil :

- le moment du poids par rapport à O est $-mgl \sin \theta$
 - le moment de la force de tension du fil est nul (le support de la force passe par l'axe O)
- d'où l'équation :

$$-mgl \sin \theta = I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = ml^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

d'où :

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (1.9)$$

Si on se limite à des oscillations d'amplitudes faibles, on peut faire l'approximation $\sin \theta \approx \theta$ et on retrouve l'équation classique d'un oscillateur harmonique :

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0 \Rightarrow \theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$$

dont la pulsation est $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ et la période $T_0 = 2\pi \sqrt{l/g}$.

Cependant, si l'amplitude θ_0 des oscillations est grande (typiquement $\theta_0 > 10^\circ$) l'approximation ci-dessus n'est plus valable et on doit résoudre l'équation (1.9). Cette équation n'est pas intégrable explicitement à l'aide des fonctions usuelles, cependant on peut déterminer la période T du mouvement. En multipliant les deux membres de l'équation (1.9) par $2d\theta/dt$ et en intégrant :

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - 2\frac{g}{l} \cos \theta = C^{te}$$

Lorsque le pendule atteint son angle maximum θ_0 la vitesse est nulle, la constante d'intégration vaut donc $-2g/l \cos \theta_0$ d'où :

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{2\frac{g}{l}(\cos \theta - \cos \theta_0)} \Rightarrow \sqrt{\frac{g}{l}} dt = \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}} \quad (1.10)$$

Si $\theta = 0$ à $t = 0$ alors $\theta = \theta_0$ à $t = T/4$, soit en intégrant les deux membres de (1.10) entre 0 et $T/4$ et entre 0 et θ_0 respectivement :

$$\sqrt{\frac{g}{l}} \frac{T}{4} = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}} = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{2\sqrt{\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)}}$$

le membre de droite de cette dernière équation peut être calculé en utilisant un développement limité. Pour cela on exprime θ en fonction de θ_0 sous la forme $\sin(\theta/2) = \sin(\theta_0/2) \sin \phi$, on obtient ainsi, avec $T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$, période du pendule dans le cas de l'approximation harmonique :

$$\frac{\pi T}{2 T_0} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_0/2) \sin^2 \phi}}$$

En utilisant le développement en série :

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \times 3}x^3 + \dots$$

on a :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_0/2) \sin^2 \phi}} = \left(1 - \sin^2(\theta_0/2) \sin^2 \phi\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} \sin^2(\theta_0/2) \sin^2 \phi + \frac{3}{8} \sin^4(\theta_0/2) \sin^4 \phi + \dots$$

et :

$$T = \frac{2T_0}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} d\phi + \frac{1}{2} \sin^2(\theta_0/2) \int_0^{\pi/2} \sin^2 \phi d\phi + \frac{3}{8} \sin^4(\theta_0/2) \int_0^{\pi/2} \sin^4 \phi d\phi + \dots \right]$$

En utilisant le résultat connu de l'intégrale

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \phi d\phi = \frac{\pi}{2} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 2 \times 6 \times \dots \times (2n)}$$

on a finalement :

$$T = T_0 \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) + \frac{9}{64} \sin^4 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) + \dots \right]$$

On voit que la période du pendule augmente avec l'amplitude des oscillations, pour $\theta_0 = 45^\circ$:

$$\frac{T}{T_0} = 1 + 3.66 \times 10^{-2} + 3.0 \times 10^{-3} + \dots \approx 1.04$$

cette augmentation n'excède cependant pas 4%.

1.3 L'oscillateur harmonique libre amorti

Un oscillateur libre n'oscille pas indéfiniment : l'amplitude de ses oscillations décroît plus ou moins rapidement avec le temps et il finit toujours par s'arrêter. Ce sont les forces de frottement qui sont responsables de ce phénomène d'amortissement qui correspond à une perte d'énergie de l'oscillateur au profit du milieu qui l'entoure. La rapidité avec laquelle l'oscillateur perd son énergie dépend de la nature des forces dissipatives auxquelles il est soumis et que nous pouvons illustrer par quelques exemples :

- frottement solide : frottement au niveau de l'axe de rotation d'un pendule.
- frottement visqueux en régime laminaire : frottement entre un fluide et une masse oscillante de faibles dimensions et de vitesse pas trop élevée.
- frottement visqueux en régime turbulent : même cas que précédemment mais pour des vitesses élevés.

Nous supposons dans ce qui suit que la perte d'énergie $-dE$ pendant l'intervalle de temps dt est proportionnelle à l'énergie cinétique E_c , ce qui peut s'écrire :

$$dE = -4\gamma E_c dt \quad (1.11)$$

où γ est une constante positive appelée coefficient d'amortissement.

Cette perte d'énergie est égale au travail des forces dissipatives de résultante \vec{f} . Si le mouvement a lieu selon x on a :

$$dE = f dx = f \frac{dx}{dt} dt = f v dt$$

Soit, en identifiant avec 1.11 :

$$f v dt = -4\gamma E_c dt \Rightarrow f = -4\gamma \frac{E_c}{v} = -2\gamma m v$$

Cette hypothèse correspond donc à une force proportionnelle (et opposée) à la vitesse, c'est la cas pour une force de frottement visqueux en régime laminaire.

On peut maintenant écrire l'équation du mouvement sous la forme :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -Kx - 2\gamma m \frac{dx}{dt}$$

Soit, en divisant par m et en posant $K/m = \omega_0^2$, pulsation propre du système :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Cette équation est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, dont l'équation caractéristique est :

$$r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0 \quad (1.12)$$

les solutions de l'équation caractéristique sont :

$$r_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} ; \quad r_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Et par conséquent la solution générale de l'équation du mouvement est la fonction :

$$x(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$$

où A et B sont des constantes à déterminer d'après les conditions de mise en mouvement du système.

Remarque : $x(t)$ doit être ici une fonction réelle car elle représente le mouvement réel de l'oscillateur. Nous n'avons pas supposé ici *a priori* que $x(t)$ est une fonction complexe dont il faut ensuite prendre la partie réelle.

Trois cas sont à distinguer :

1. Si $\gamma > \omega_0$ alors r_1 et r_2 sont réelles et distinctes. Le mouvement s'amortit de manière exponentielle sans oscillation, on parle de **régime apériodique**.
2. Si $\gamma < \omega_0$ alors r_1 et r_2 sont complexes conjuguées, et on a, en posant $\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$:

$$r_1 = -\gamma + i\omega_p ; \quad r_2 = -\gamma - i\omega_p$$

La solution générale complexe est donc :

$$x = e^{-\gamma t} (A e^{i\omega_p t} + B e^{-i\omega_p t}) = (A + B) \cos \omega_p t + i(A - B) \sin \omega_p t$$

Pour que cette fonction soit réelle il faut que $A + B$ soit réel et $A - B$ imaginaire, c'est à dire que A et B doivent être complexes conjugués, soit : $A = \alpha + i\beta$ et $B = \alpha - i\beta$, ce qui donne

$$x = [(\alpha + i\beta) e^{i\omega_p t} + (\alpha - i\beta) e^{-i\omega_p t}] = 2e^{-\gamma t} (\alpha \cos \omega_p t - \beta \sin \omega_p t)$$

Où encore, en remarquant que $2(\alpha \cos \omega_p t - \beta \sin \omega_p t)$ peut se mettre sous la forme $x_m \cos(\omega_p t - \varphi)$ cette expression peut s'écrire sous la forme plus habituelle :

$$x = x_m e^{-\gamma t} \cos(\omega_p t - \varphi)$$

Pour déterminer x_m et φ en fonction de α et β on peut utiliser une construction de Fresnel en remarquant que :

$$\alpha \cos \omega_p t - \beta \sin \omega_p t = \alpha \cos \omega_p t + \beta \cos(\omega_p t - \frac{\pi}{2})$$

On en déduit immédiatement, d'après la figure 1.8 que :

$$\begin{aligned} x_m &= 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ \varphi &= \arctan(\beta/\alpha) \end{aligned} \quad (1.13)$$

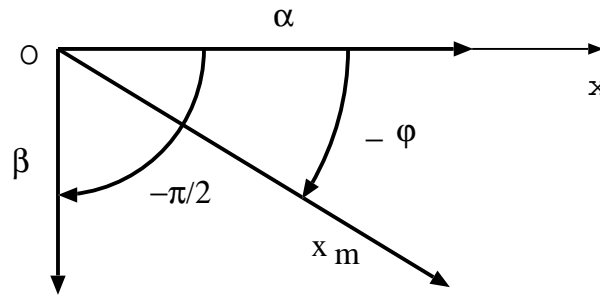


FIG. 1.8 – Construction de Fresnel permettant de déterminer x_m et φ en fonction de α et β .

On a maintenant un mouvement d'oscillation amorti. Ce mouvement n'est pas périodique puisque son amplitude décroît au cours du temps, on dit qu'il est **pseudopériodique**. La pseudopulsation $\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ est inférieure à la pulsation propre ω_0 du système non amorti.

Le rapport des amplitudes entre deux instants séparés d'une pseudopériode $T = 2\pi/\omega_p$ est constant :

$$\frac{x(t)}{x(t+T)} = \frac{x_m \exp(-\gamma t) \cos(\omega_p t - \varphi)}{x_m \exp[-\gamma(t+T)] \cos[\omega_p(t+T) - \varphi]} = \exp(\gamma T)$$

le logarithme de cette constante : $\lambda = \gamma T$ est appelé **décroissement logarithmique** du mouvement.

3. Si $\gamma = \omega_0$ les racines r_1 et r_2 sont réelles et confondues et le mouvement est donné par :

$$x = e^{-\gamma t}(At + B)$$

Ce cas correspond à l'**amortissement critique** il constitue la frontière entre les deux cas précédents.

Ces trois régimes : apériodique, pseudopériodique et critique sont illustrés par les diagrammes $x(t)$ de la figures 1.9

1.4 L'oscillateur harmonique amorti en régime forcé

Nous avons vu qu'un oscillateur libre finit toujours par s'arrêter à cause des forces dissipatives, pour que son mouvement persiste il faut donc lui fournir de l'énergie pour compenser les pertes d'énergie par frottement. Nous allons donc étudier le mouvement d'un oscillateur soumis à une force excitatrice périodique sinusoidale $F = F_0 \cos \omega t$.

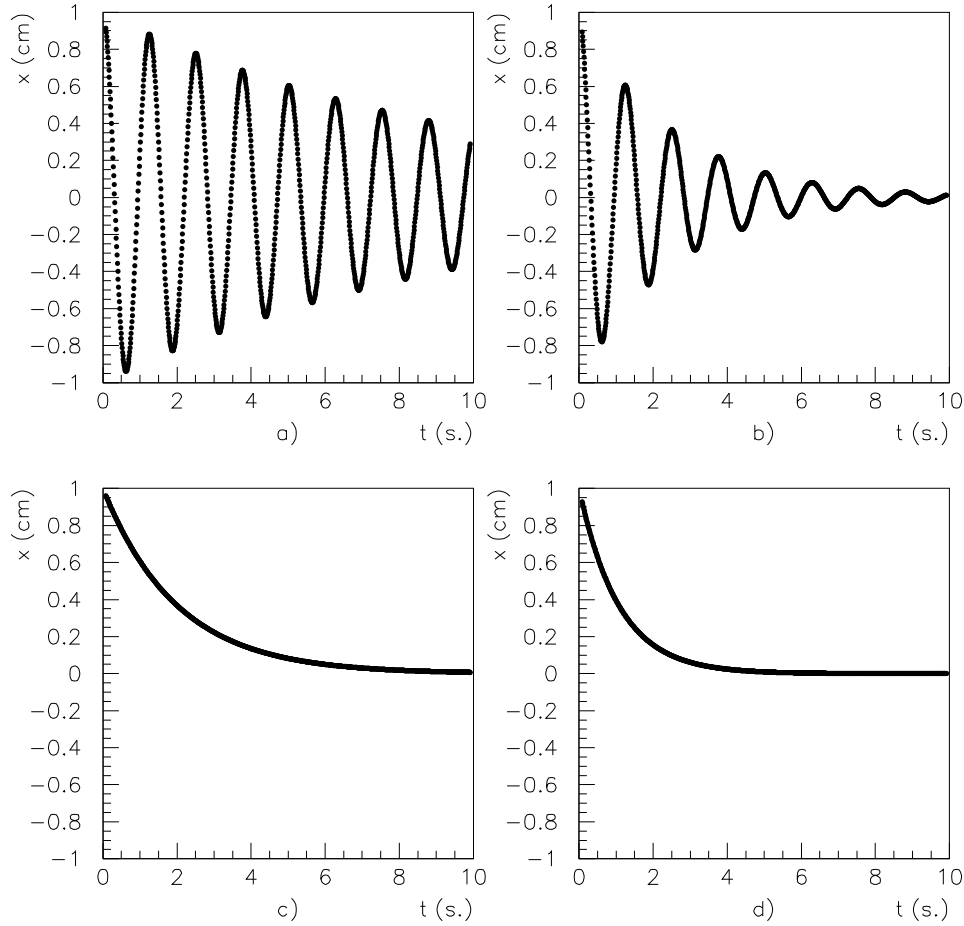


FIG. 1.9 – Exemples de diagrammes $x(t)$: (a) pour un mouvement pseudopériodique faiblement amorti ($\gamma = 0.02\omega_0$), (b) pseudopériodique plus fortement amorti ($\gamma = 0.1\omega_0$), (c) critique ($\gamma = \omega_0$), (d) apériodique ($\gamma = 1.2\omega_0$).

1.4.1 Amplitude du mouvement en fonction de la fréquence

L'équation du mouvement en notation complexe, si on considère un oscillateur se déplaçant selon la coordonnée x , est :

$$m \frac{d^2 \tilde{x}}{dt^2} = -K \tilde{x} - 2\gamma m \frac{d\tilde{x}}{dt} + F_0 e^{i\omega t}$$

En introduisant la pulsation propre $\omega_0^2 = K/m$ et la force réduite $f = F/m$ on a :

$$\frac{d^2 \tilde{x}}{dt^2} + 2\gamma \frac{d\tilde{x}}{dt} + \omega_0^2 \tilde{x} = \tilde{f} = f_0 e^{i\omega t} \quad (1.14)$$

Cherchons quelles sont les solutions qui correspondent à un mouvement de même pulsation ω que la force excitatrice sous la forme :

$$\tilde{x} = a e^{i(\omega t - \varphi)} = \tilde{a} e^{i\omega t}$$

Les dérivées s'obtiennent facilement :

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = i\omega\tilde{x} \quad ; \quad \frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} = -\omega^2\tilde{x}$$

et l'équation 1.14 devient :

$$-\omega^2\tilde{x} + 2i\omega\gamma\tilde{x} + \omega_0^2\tilde{x} = f_0e^{i\omega t}$$

avec pour solution :

$$\tilde{x} = \frac{f_0e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega}$$

En identifiant avec $\tilde{x} = ae^{i(\omega t - \varphi)}$ on trouve l'amplitude et la phase du déplacement $x(t)$ sous la forme :

$$a = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Cette solution correspond à un régime permanent obtenue après une phase transitoire, que nous n'étudierons pas ici et qui correspond à la mise en mouvement du système. La durée de cette phase transitoire dépend du coefficient d'amortissement γ : elle sera d'autant plus longue que γ est grand.

On remarque que l'amplitude du déplacement est proportionnelle à l'amplitude de la force excitatrice et qu'elle dépend de sa pulsation ω avec l'apparition d'un **phénomène de résonance** au voisinage de $\omega = \omega_0$ que l'on peut déterminer en étudiant la fonction $a(\omega)$.

Etude de la fonction $a(\omega)$

étudions le signe de la dérivée $da/d\omega$:

$$\frac{da}{d\omega} = f_0 \frac{2\omega(\omega_0^2 - \omega^2 - 2\gamma^2)}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]^{3/2}}$$

Le dénominateur étant toujours strictement positif, ainsi que la pulsation ω le signe de la dérivée est donné par le terme : $\omega_0^2 - \omega^2 - 2\gamma^2$. Deux cas sont à étudier :

$$\omega_0^2 - 2\gamma^2 \leq 0, \text{ c'est à dire } \gamma \geq \omega_0/\sqrt{2}$$

dans ce cas le numérateur, et par conséquent $da/d\omega$ est toujours strictement négatif et la fonction $a(\omega)$ décroissante lorsque ω va de 0 à $+\infty$. La courbe de la figure 1.10 correspondant à $\gamma = \omega_0$ illustre ce cas.

$$\omega_0^2 - 2\gamma^2 > 0, \text{ c'est à dire } \gamma < \omega_0/\sqrt{2}$$

Dans ce cas la dérivée est d'abord positive, puis s'annule pour $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$ et devient négative ensuite. La fonction $a(\omega)$ présente donc un maximum qui vaut :

$$a_{max} = \frac{f_0}{\sqrt{4\gamma^4\left(\frac{\omega_0^2}{\gamma^2} - 1\right)}} \quad ; \quad \gamma < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$$

ceci est illustré par les graphes de la figure 1.10.

Pour de faibles amortissement $\gamma \ll \omega_0$, la résonance est très marquée et le maximum d'amplitude est obtenu pour ω très proche de ω_0 et on a : $a_{max} \approx f_0/(2\gamma\omega)$ L'amplitude maximum est inversement proportionnelle à l'amortissement γ . D'autre part, pour un amortissement faible, la largeur à mi-hauteur $\Delta\omega$ du pic de résonance est proportionnelle à γ : $\Delta\omega \approx 2\gamma$.

Etude de $\varphi(\omega)$

Le déphasage $\varphi(\omega)$ varie de 0 pour $\omega = 0$ à π pour $\omega \rightarrow \infty$ en passant par la valeur $\pi/2$ pour $\omega = \omega_0$.

On remarque donc que pour $\omega = \omega_0$, c'est à dire au voisinage de la résonance, déplacement et force sont donc en quadrature : la force est maximum lorsque le déplacement est nul (passage par la position d'équilibre) et elle est nulle lorsque le déplacement est maximum.

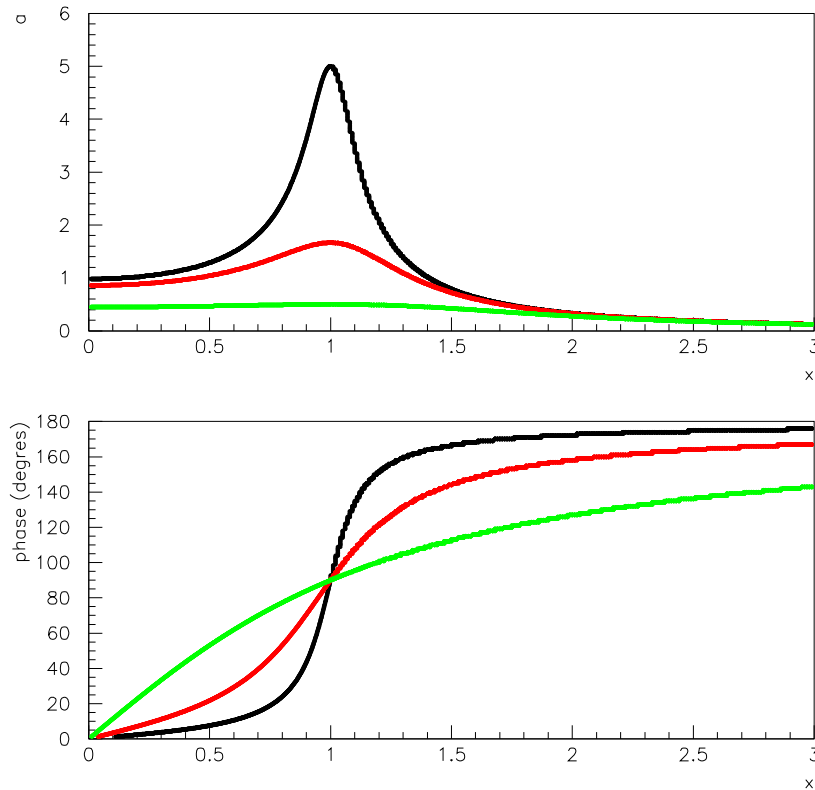


FIG. 1.10 – Amplitude du déplacement $a(\omega)$ et phase $\varphi(\omega)$ en fonction de $x = \omega/\omega_0$ pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement : $\gamma = \omega_0/10$ (noir), $\gamma = \omega_0/3$ (gris foncé), $\gamma = \omega_0$ (gris clair).

1.4.2 Etude en fonction de la vitesse

Si on écrit l'équation 1.14 en fonction de la vitesse $\tilde{v} = d\tilde{x}/dt$ on obtient, avec $\tilde{v} = i\omega\tilde{x}$ en régime sinusoïdal :

$$i\omega\tilde{v} + 2\gamma\tilde{v} + \omega_0^2 \frac{\tilde{v}}{i\omega} = \tilde{f}$$

Ou encore, en revenant aux grandeurs mécaniques $\tilde{F} = m\tilde{f}$, $\alpha = 2m\gamma$ et $K = m\omega_0^2$:

$$\tilde{F} = \left(\alpha + i \left(m\omega - \frac{K}{\omega} \right) \right) \tilde{v} \quad (1.15)$$

La relation 1.15 peut se traduire par le diagramme de Fresnel représenté figure 1.11. On retrouve ainsi graphiquement l'amplitude $v_0 = \omega a$ et la phase $\phi = \varphi + \pi/2$ de la vitesse $v(t)$:

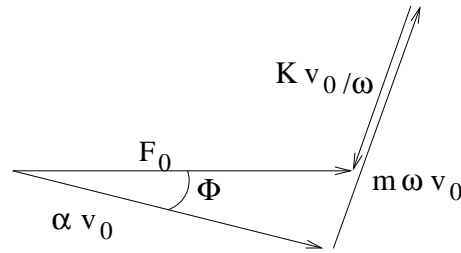


FIG. 1.11 – *Représentation de Fresnel de la relation entre \vec{F} et \vec{v} dans le plan complexe.*

$$v_0 = \frac{F_0}{\sqrt{\alpha^2 + \left(m\omega - \frac{K}{\omega}\right)^2}} = \omega a$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{m\omega - \frac{K}{\omega}}{\alpha}\right) = \varphi + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos \phi = \frac{\alpha v_0}{F_0}$$

On remarquera en particulier que l'amplitude de la vitesse est maximum (résonance) et que la force excitatrice et la vitesse sont en phase pour $\omega = \omega_0$.

1.4.3 Énergie de l'oscillateur harmonique forcé

La puissance P fournie par la force excitatrice est :

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = v_0 F_0 \cos \omega t \cos(\omega t - \phi)$$

La valeur moyenne de cette puissance au cours du temps est :

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \vec{F} \cdot \vec{v} dt \\ &= \frac{F_0 v_0}{T} \int_0^T \cos \omega t \cos(\omega t - \phi) dt \\ &= \frac{F_0 v_0}{2T} \int_0^T \cos \phi dt + \cos(2\omega t - \phi) dt \\ &= \frac{F_0 v_0 \cos \phi}{2} \end{aligned}$$

Soit encore, en remarquant que $\cos \phi = \alpha v_0 / F_0$:

$$\langle P \rangle = \frac{\alpha v_0^2}{2} = \frac{\alpha \omega^2 a^2}{2}$$

Cette puissance est la puissance moyenne dissipée par la force de frottement αv .

D'autre part l'énergie moyenne $\langle E_s \rangle$ stockée par l'oscillateur est :

$$\langle E_s \rangle = \langle E_c \rangle + \langle E_p \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle + \frac{1}{2} K \langle x^2 \rangle = \frac{1}{4} (m\omega^2 + K) a^2$$

puisque x et v sont des grandeurs sinusoïdales dont les valeurs moyennes des carrés sont $a^2/2$ et $v_0^2/2 = \omega^2 a^2/2$ respectivement.

Un oscillateur aura un bon rendement si l'amplitude des oscillations est grande pour une énergie dissipée faible. On définit donc le **facteur de qualité** Q par le rapport (à un facteur 2π près) entre

l'énergie moyenne stockée, proportionnelle au carré de l'amplitude des oscillations et l'énergie dissipée pendant une période :

$$Q = 2\pi \frac{\langle E_s \rangle}{\langle P \rangle T} = \omega \frac{\langle E_s \rangle}{\langle P \rangle} = \frac{m\omega^2 + K}{2\alpha\omega} = \frac{\omega^2 + \omega_0^2}{4\gamma\omega}$$

le facteur de qualité est inversement proportionnel au coefficient de frottement, il est maximum pour $\omega = \omega_0$ et vaut alors $Q_{max} = m\omega_0/\alpha = \omega_0/2\gamma$.

On peut également caractériser un phénomène de résonance par sa **bande passante** définie par l'intervalle de pulsations $\Delta\omega$ pour lequel on a $a > a_{max}/\sqrt{2}$.

Pour $\gamma \ll \omega_0$ on a :

$$\Delta\omega \approx 2\gamma$$

1.4.4 Exemples de phénomènes de résonance

On rencontre dans la vie courante de nombreux exemples de systèmes mécaniques pouvant entrer en résonance. On peut, selon les cas, favoriser ou essayer d'atténuer ces résonances.

- Une roue de masse M reliée au châssis d'une automobile par un ressort de suspension de raideur K possède une fréquence de résonance $f \approx 1/(2\pi)\sqrt{M/K}$ si l'automobile rencontre une série de bosses ou de trous avec une fréquence voisine de f il pourra en résulter des oscillations de grandes amplitudes nuisibles à la tenue de route du véhicule. C'est pourquoi on équipe la suspension d'un amortisseur de façon à être dans un régime d'amortissement critique permettant de revenir à la position d'équilibre le plus doucement possible sans osciller (système avec un Q faible).
- De la même façon, un pont peut entrer en résonance sous l'action du pas cadencé des soldats qui le traversent (deux ponts se sont ainsi effondrés au dix-neuvième siècle : l'un près de Manchester en 1831, l'autre sur le Maine en France en 1849) ou encore sous l'action de rafales de vent comme cela a été le cas à Tacoma Narrows¹. De nos jours des études en soufflerie sont effectuées lors de la conception des grands ouvrages et des systèmes d'amortisseurs sont mis en places pour limiter l'amplitude des oscillations dues au vent ou bien d'origines sismiques.
- Au contraire, pour le balancier d'une horloge, on cherchera à minimiser les frottements de façon à ce qu'il oscille à sa période propre en perdant le moins d'énergie possible. L'énergie perdue à chaque oscillation est compensée par une petite impulsion, fournie par un système mécanique, en phase avec le mouvement comme pour entretenir le mouvement d'une balançoire (système avec un Q élevé).

1.5 Oscillateurs harmoniques couplés

Nous avons vu qu'un oscillateur libre, amorti ou non, est caractérisé par une pulsation propre déterminée par ses caractéristiques mécaniques (inertie, force de rappel...). En régime sinusoïdal forcé, cet oscillateur vibre avec la pulsation imposée par la force excitatrice, avec un phénomène de résonance, correspondant à une amplitude maximum, lorsque la pulsation excitatrice est voisine de la pulsation propre.

Nous allons examiner maintenant comment le mouvement d'un oscillateur est affecté par une force d'interaction (ou force de couplage) avec un autre oscillateur. Nous nous placerons d'abord en régime sinusoïdal forcé, plus simple car la pulsation est imposé par la force excitatrice.

1.5.1 Couplage en régime forcé

Considérons les deux oscillateurs identiques (masse m raideur k) de la figure 1.12, reliés par un ressort de raideur K responsable de la force d'interaction entre les deux oscillateurs et appliquons une force excitatrice sinusoïdal $\vec{F} = F_0 \exp(i\omega t)$ à l'oscillateur 1.

¹une vidéo montrant l'effondrement du pont est visible sur le site : <http://www.ac-nice.fr/physique/Oscillateur/pont.html>

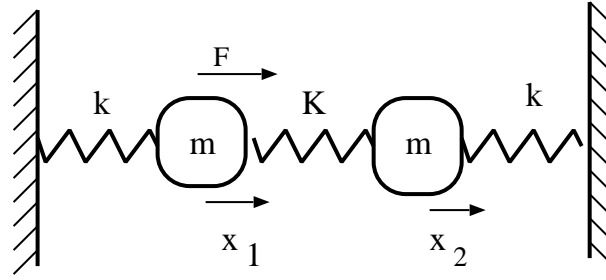


FIG. 1.12 – Couplage de deux oscillateurs identiques par un ressort de raideur K . Une force excitatrice sinusoidale est appliquée à l'oscillateur 1.

Soient $\tilde{x}_1 = a_1 \exp[i(\omega t - \varphi_1)]$ et $\tilde{x}_2 = a_2 \exp[i(\omega t - \varphi_2)]$ les déplacements des masses par rapport à leur position d'équilibre, correspondant à un allongement nul des trois ressorts.

Appliquons la relation de la dynamique aux deux oscillateurs :

$$\begin{aligned} -m\omega^2 \tilde{x}_1 &= -k\tilde{x}_1 - K(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) + \tilde{F} \\ -m\omega^2 \tilde{x}_2 &= -k\tilde{x}_2 - K(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) \end{aligned}$$

Pour simplifier posons $(k + K)/m = \Omega_1^2$ et $K/m = \Omega_2^2$ Le système précédent devient :

$$\begin{aligned} (-\omega^2 + \Omega_1^2)\tilde{x}_1 - \Omega_2^2\tilde{x}_2 &= \frac{\tilde{F}}{m} \\ (-\omega^2 + \Omega_1^2)\tilde{x}_2 - \Omega_2^2\tilde{x}_1 &= 0 \end{aligned}$$

En résolvant ce système de deux équations à deux inconnues on trouve les deux déplacements sous la forme :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= a_1 e^{i(\omega t - \varphi_1)} = \frac{\Omega_1^2 - \omega^2}{(\Omega_1^2 - \omega^2)^2 - \Omega_2^4} \frac{F_0 e^{i\omega t}}{m} \\ \tilde{x}_2 &= a_2 e^{i(\omega t - \varphi_2)} = \frac{\Omega_2^2}{(\Omega_1^2 - \omega^2)^2 - \Omega_2^4} \frac{F_0 e^{i\omega t}}{m} \end{aligned}$$

On remarque que \tilde{x}_1 et \tilde{x}_2 sont, soit en phase, soit en opposition de phase avec \tilde{F} , on peut donc écrire les déplacements réels sous forme algébrique :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\Omega_1^2 - \omega^2}{(\Omega_1^2 - \omega^2)^2 - \Omega_2^4} \frac{F_0}{m} \cos \omega t = a_1 \cos \omega t \\ x_2 &= \frac{\Omega_2^2}{(\Omega_1^2 - \omega^2)^2 - \Omega_2^4} \frac{F_0}{m} \cos \omega t = a_2 \cos \omega t \end{aligned}$$

Les dénominateurs peuvent s'annuler, ce qui correspond à des résonances dont les amplitudes sont infinies, car nous n'avons pris en compte aucune force d'amortissement. Les pulsations de résonances ω_1 et ω_2 sont égales à :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\Omega_1^2 - \Omega_2^2} = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_2 &= \sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2} = \sqrt{\frac{k + 2K}{m}} \end{aligned}$$

D'autre part, le rapport des amplitudes $a_1/a_2 = (\Omega_1^2 - \omega^2)/\Omega_2^2$ est positif pour $\omega < \Omega_1$ (les deux oscillateurs vibrent en phase) et négatif pour $\omega > \Omega_1$ (les deux oscillateurs vibrent en opposition de phase).

On peut également remarquer que, pour $\omega = \omega_1 = \sqrt{k/m}$, on a $a_1 = a_2$: les deux oscillateurs vibrent en phase avec des amplitudes égales ; le ressort de couplage a donc un allongement nul et ne joue aucun rôle durant la phase stationnaire du mouvement. En fait il ne joue un rôle que pendant la phase transitoire de mise en mouvement pour transmettre le mouvement de la masse 1 à la masse 2. Au contraire pour $\omega = \omega_2$, $a_1 = -a_2$ les deux oscillateurs vibrent en opposition phase avec des amplitudes égales.

Exemple : pour $k = K$, on a :

$$\Omega_1^2 = \frac{2K}{m} \quad ; \quad \Omega_2^2 = \frac{K}{m}$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 = \frac{K}{m} \quad ; \quad \omega_2^2 = \frac{3K}{m} = 3\omega_1^2$$

La figure 1.13 montre le tracé des amplitudes réduites $A_1 = a_1/a_1(\omega = 0)$ et $A_2 = a_2/a_1(\omega = 0)$ en fonction de la pulsation réduite $f = \omega/\omega_1$. Soit les fonctions :

$$A_1 = \frac{a_1}{a_1(\omega = 0)} = \frac{-3(f^2 - 1)}{2(f^2 - 1)(f^2 - 3)}$$

$$A_2 = \frac{a_2}{a_1(\omega = 0)} = \frac{3}{2(f^2 - 1)(f^2 - 3)}$$

Sur cette figure on remarque que :

- lorsque $\omega \rightarrow 0$, c'est à dire dans le cas d'une force statique dirigée vers les x positifs, le déplacement de la masse 1 est le double de celui de la masse 2, puisque les 3 ressorts sont identiques. Il est facile de déduire ce résultat de l'équation du mouvement pour $\omega = 0$.
- Lorsqu'on s'approche de la première résonance $\omega = \omega_1$, les amplitudes a_1 et a_2 tendent vers l'infini, du fait qu'il n'y a pas d'amortissement, mais leur rapport tend vers 1, les deux masses vibrent en phase avec des amplitudes égales .
- Lorsqu'on s'approche de la seconde résonance $\omega = \omega_2$, a_1 et a_2 tendent vers plus l'infini et moins l'infini respectivement avec un rapport qui tend vers 1 en valeur absolue : les deux masses vibrent en opposition de phase avec des amplitudes égales.
- Enfin, on remarque que pour $\omega = \sqrt{2}\omega_1$ on a $a_1 = 0$: la masse à laquelle on applique la force ne vibre pas !

1.5.2 Oscillateurs couplés libres

Si on reprend le système d'oscillateurs couplés de la figure 1.12, sans la force excitatrice F , il obéit, avec les mêmes notations que précédemment, aux équations :

$$\begin{aligned} (-\omega^2 + \Omega_1^2)\tilde{x}_1 - \Omega_2^2\tilde{x}_2 &= 0 \\ -\Omega_2^2\tilde{x}_1 + (-\omega^2 + \Omega_1^2)\tilde{x}_2 &= 0 \end{aligned}$$

Ce système avec second membre nul est dit homogène, il n'a de solution non nulle que si les deux équations qui le constituent sont une combinaison linéaire l'une de l'autre, ce qui se traduit par un déterminant nul :

$$(-\omega^2 + \Omega_1^2)^2 - \Omega_2^4 = 0$$

On retrouve comme solution de cette équation les pulsation de résonance $\omega_1 = \sqrt{\Omega_1^2 - \Omega_2^2}$ et $\omega_2 = \sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}$ du régime forcé. Ces pulsations sont appelées pulsation propres du système : elles correspondent à deux modes propres de vibration :

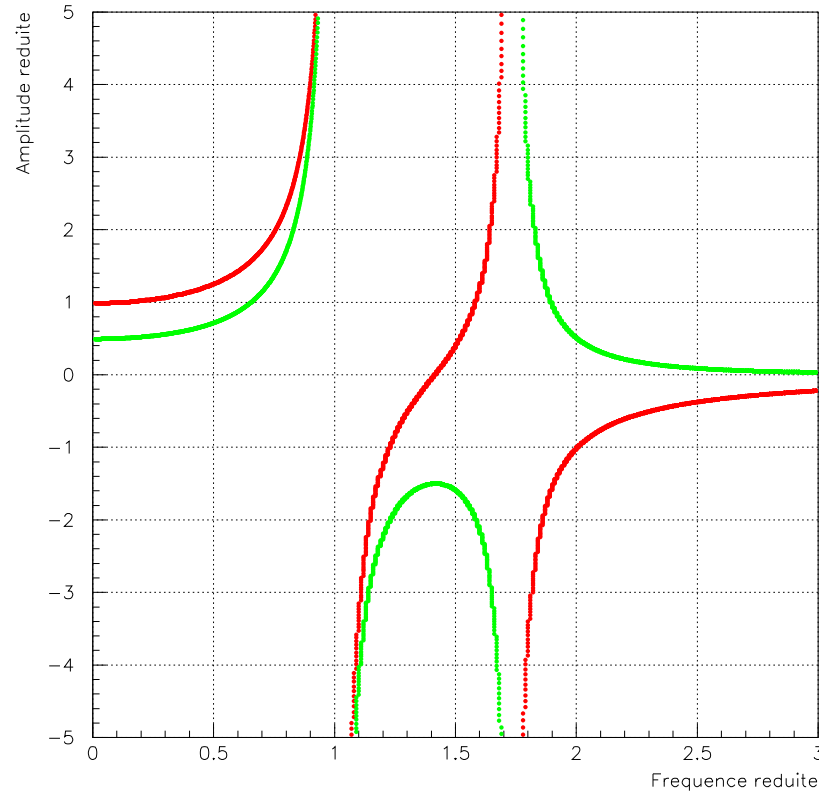


FIG. 1.13 – Amplitudes réduites A_1 (courbe noire) et A_2 (courbe grise) des oscillations couplées en fonction de la fréquence réduite $f = \omega/\omega_1$ correspondant au système de la figure 1.12 pour $K = k$.

- $\omega = \omega_1$ donne $x_1 = x_2 = a_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$: les deux masses vibrent en phase avec la même amplitude a_1 , déterminée par les conditions initiales du mouvement.
- $\omega = \omega_2$ donne $x_1 = -x_2 = a_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$ les deux masses vibrent en opposition de phase avec la même amplitude a_2 , déterminée par les conditions initiales du mouvement.

Si on met en mouvement le système dans un des modes propres ω_1 ou ω_2 , il restera en mouvement dans ce mode de vibration.

Si on met en mouvement le système de façon quelconque son mouvement sera, dans le cas général, une combinaison linéaire des deux modes propres correspondant aux pulsations propres ω_1 et ω_2 :

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + a_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_2 &= a_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - a_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{aligned}$$

La détermination des quatre constantes a_1 , a_2 , ϕ_1 et ϕ_2 n'est possible que si on connaît les conditions initiales du mouvement, c'est à dire les positions et vitesses des masses à $t = 0$.

Exemple : prenons $k = K$ (soit $\omega_2 = \sqrt{3}\omega_1$) et supposons que, à $t = 0$, la masse 1 soit lâchée sans vitesse initiale en $x_1(t = 0) = a$ tandis que la masse 2 est lâchée sans vitesse initiale en $x_2(t = 0) = 0$.

on a alors :

$$\begin{aligned} x_1(t = 0) &= a = a_1 \cos(\phi_1) + a_2 \cos(\phi_2) \\ x_2(t = 0) &= 0 = a_1 \cos(\phi_1) - a_2 \cos(\phi_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}(t=0) &= 0 = -\omega_1 a_1 \sin(\phi_1) - \omega_2 a_2 \sin(\phi_2) \\ \frac{dx_2}{dt}(t=0) &= 0 = -\omega_1 a_1 \sin(\phi_1) + \omega_2 a_2 \sin(\phi_2)\end{aligned}$$

Ce système de quatre équations à quatre inconnues se résoud aisément et on trouve :

$$\begin{aligned}a_1 &= a_2 = \frac{a}{2} \\ \phi_1 &= \phi_2 = 0\end{aligned}$$

Le mouvement des deux masses sera donc décrit par les équations :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{a}{2} \left[\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t\right) + \cos\left(\sqrt{\frac{3K}{m}}t\right) \right] \\ x_2 &= \frac{a}{2} \left[\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t\right) - \cos\left(\sqrt{\frac{3K}{m}}t\right) \right]\end{aligned}$$

Ce mouvement est illustré par les graphes de la figure 1.14 on peut remarquer que, comme le rapport des pulsations est irrationnel ($\sqrt{3}$) le mouvement correspondant à la combinaison linéaire des deux modes propres n'est pas périodique.

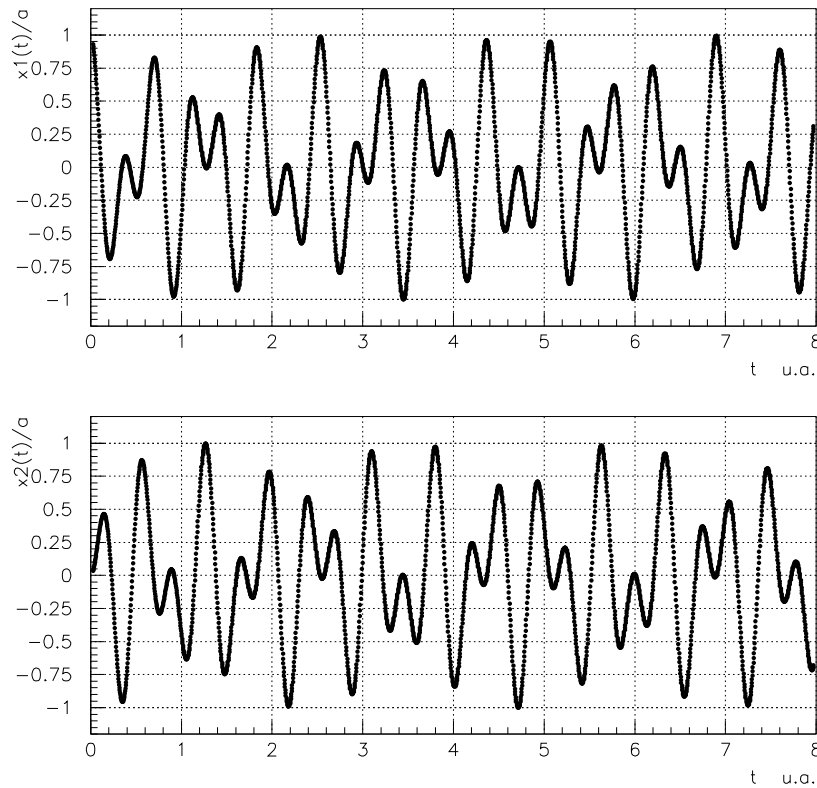


FIG. 1.14 – déplacement $x_1(t)/a$ et $x_2(t)/a$ pour le système couplé.

1.5.3 chaîne d'oscillateurs couplés

Considérons la chaîne d'oscillateurs couplés identiques de la figure 1.15. A l'équilibre les masses m sont distantes de d et on note $\xi_n(t)$ le déplacement de la masse n par rapport à sa position d'équilibre x_n .

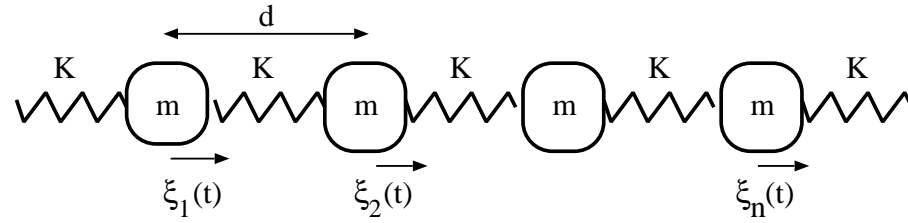


FIG. 1.15 – chaîne d'oscillateurs couplés identiques.

La relation de la dynamique appliquée à la masse vibrant autour de la position x_n donne :

$$m \frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = -K(\xi_n - \xi_{n+1}) - K(\xi_n - \xi_{n-1}) = K(\xi_{n-1} - 2\xi_n + \xi_{n+1}) \quad (1.16)$$

Cherchons les solutions harmoniques sous la forme $\tilde{\xi}_n = a_n \exp i\omega t$, où a_n est une amplitude complexe :

$$-\omega^2 a_n = \frac{K}{m}(a_{n-1} - 2a_n + a_{n+1}) \Rightarrow -a_{n-1} + \left(2 - \frac{m\omega^2}{K}\right) a_n - a_{n+1} = 0$$

Si la chaîne contient $N + 2$ masses numérotées de 0 à $N + 1$ et reliée par $N + 1$ ressorts, en supposant que la première et la dernière masse sont fixées ($a_0 = a_{N+1} = 0$) on obtient un système homogène de N équations à N inconnues (amplitudes des N masses pouvant vibrer) que l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} \left(2 - \frac{m\omega^2}{K}\right) a_1 - a_2 &= 0 \\ -a_1 + \left(2 - \frac{m\omega^2}{K}\right) a_2 - a_3 &= 0 \\ \dots\dots\dots &= 0 \\ -a_{n-1} + \left(2 - \frac{m\omega^2}{K}\right) a_n - a_{n+1} &= 0 \\ \dots\dots\dots &= 0 \\ -a_{N-1} + \left(2 - \frac{m\omega^2}{K}\right) a_N &= 0 \end{aligned}$$

On peut montrer qu'il existe N modes propres ω_p , pour les trouver posons $\omega_0^2 = K/m$, l'équation générale peut alors se mettre sous la forme :

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{a_n} = \frac{2\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} \quad (1.17)$$

Cherchons l'amplitude de la nième masse, pour le mode propre ω_p sous la forme :

$$a_n = C_p \sin n\theta_p$$

où C_p est une constante complexe et θ_p un angle constant pour une pulsation donnée ω_p . le membre de gauche de l'équation 1.17 devient :

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{a_n} = \frac{C_p [\sin(n-1)\theta_p + \sin(n+1)\theta_p]}{C_p \sin n\theta_p} = \frac{2C_p \sin n\theta_p \cos \theta_p}{C_p \sin n\theta_p} = 2 \cos \theta_p$$

le membre de gauche de l'équation 1.17 est donc constant et indépendant de n .

La valeur θ_p pour le mode ω_p peut être déterminée grâce aux conditions aux limites, la première :

$$a_0 = 0 = C_p \sin 0$$

est automatiquement vérifiée. La seconde :

$$a_{N+1} = 0 = C_p \sin(N+1)\theta_p$$

donne :

$$(N+1)\theta_p = p\pi \Rightarrow \theta_p = \frac{p\pi}{N+1} \quad p = 1, 2, \dots, N$$

Les valeurs $p = 0$ et $p = N+1$ sont exclues car elles correspondent à des amplitudes nulles. On peut donc écrire l'amplitude de la n ème masse pour la pulsation ω_p sous la forme :

$$a_{n,p} = C_p \sin n\theta_p = C_p \sin \frac{np\pi}{N+1}$$

Et les N modes propres ω_p s'obtiennent à partir de la relation 1.17 sous la forme :

$$\frac{2\omega_0^2 - \omega_p^2}{\omega_0^2} = 2 \cos \theta_p$$

$$\Rightarrow \omega_p^2 = 2\omega_0^2 \left[1 - \cos \frac{p\pi}{N+1} \right] \quad p = 1, 2, \dots, N \quad (1.18)$$

Remarque : On peut à titre de vérification, appliquer la relation 1.18 au système de deux masses reliées par trois ressorts identiques que nous avons étudié précédemment :

On a $N=2$ (on peut considérer qu'il y a une masse No 0 et une masse No 3 qui sont fixes), on retrouve :

$$\begin{aligned} p = 1 \quad , \quad \omega_1^2 &= 2\omega_0^2(1 - \cos \pi/3) = \omega_0^2 = K/m \\ p = 2 \quad , \quad \omega_2^2 &= 2\omega_0^2(1 - \cos 2\pi/3) = 3\omega_0^2 \end{aligned}$$

Pour un système de N masses vibrantes, la plus grande pulsation possible est obtenue pour $p = N$:

$$\omega_N^2 = 2\omega_0^2 \left[1 - \cos \frac{N\pi}{N+1} \right]$$

Cette pulsation est appelée "pulsation de coupure".

L'expression complexe générale pour le mouvement des N masses est une combinaison linéaire de la forme :

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_1(t) &= C_1 \sin \left(\frac{\pi}{N+1} \right) e^{i\omega_1 t} + \dots C_p \sin \left(\frac{p\pi}{N+1} \right) e^{i\omega_p t} + \dots + C_N \sin \left(\frac{N\pi}{N+1} \right) e^{i\omega_N t} \\ \dots &= \dots \\ \tilde{\xi}_n(t) &= C_1 \sin \left(\frac{n\pi}{N+1} \right) e^{i\omega_1 t} + \dots C_p \sin \left(\frac{np\pi}{N+1} \right) e^{i\omega_p t} + \dots + C_N \sin \left(\frac{nN\pi}{N+1} \right) e^{i\omega_N t} \\ \dots &= \dots \\ \tilde{\xi}_N(t) &= C_1 \sin \left(\frac{N\pi}{N+1} \right) e^{i\omega_1 t} + \dots C_p \sin \left(\frac{Np\pi}{N+1} \right) e^{i\omega_p t} + \dots + C_N \sin \left(\frac{N^2\pi}{N+1} \right) e^{i\omega_N t} \end{aligned}$$

Il y a N constantes complexes C_p , $p = 1 \dots N$ à déterminer d'après les conditions initiales du mouvement.

Si N est grand, comme c'est le cas par exemple dans une chaîne d'atomes d'un cristal que l'on peut assimiler à une chaîne d'oscillateurs couplés, alors $\cos(N\pi/(N+1)) \approx -1$ et $\omega_N \approx 2\omega_0$.

Application : cristal monoatomique

A l'échelle microscopique, on peut modéliser le cristal monoatomique par une chaîne monodimensionnelle d'atomes identiques (figure 1.16. On appelle m la masse d'un atome et a la distance entre deux atomes successifs lorsque ceux-ci sont en équilibre. Si l'interaction entre deux atomes successifs est schématisée par des "ressorts" de raideur K la pulsation de résonance de chaque atome est $\omega_0 = \sqrt{K/m}$

A l'échelle macroscopique, le cristal est un milieu continu de section S , de longueur L et de module d'Young E .

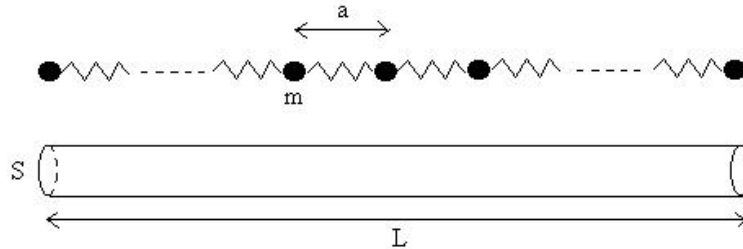


FIG. 1.16 – modèle du cristal monoatomique.

Si on soumet le cristal à une force de traction de module F celui-ci s'étire globalement d'une longueur ΔL , ce qui signifie que chaque "ressort" s'allonge de $\Delta x = a\Delta L/L$ et on a donc :

$$F = K \Delta x = K a \frac{\Delta L}{L} \quad (1.19)$$

Si on utilise les propriétés macroscopiques du cristal on peut aussi écrire :

$$F = ES \frac{\Delta L}{L} \quad (1.20)$$

En identifiant les deux expressions précédentes de la force on trouve $K = ES/a$, d'où une pulsation de résonance :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{ES}{ma}} \quad (1.21)$$

Application numérique : calculons la fréquence de résonance pour $m = 9 \times 10^{-26}$ kg ; $a = 3 \times 10^{-10}$ m ; $E = 2 \times 10^{10}$ N/m² :

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 8 \times 10^{11} \text{ Hz} \approx 800 \text{ GHz} \quad (1.22)$$

Chapitre 2

LES ONDES MECANIQUES

2.1 Caractéristiques des ondes mécaniques

2.1.1 Propagation d'énergie et de quantité de mouvement

Une onde mécanique est un ébranlement qui se propage dans un milieu matériel. Ce milieu est en général élastiquement déformable, c'est à dire qu'il reprend sa forme initiale après avoir subi une perturbation. Une corde tendue, une peau de tambour ou encore l'air constituent des exemples de tels milieux à une, deux ou trois dimensions. Lorsque ce milieu, initialement au repos, subit à un instant donné, une petite déformation locale, le voisinage du point perturbé tend à suivre la déformation, entraîne son propre voisinage et ainsi de suite : la déformation se propage de proche en proche.

La propagation d'une onde mécanique correspond à une **propagation d'énergie et de quantité de mouvement** et non pas à un déplacement global de matière. La matière ne se déplace que localement, par rapport à sa position "au repos" et ceci quelque soit le type d'onde :

- la chute d'un caillou dans l'eau provoque des vagues qui vont faire monter et descendre un bouchon flottant un peu plus loin à la surface : une partie de l'énergie du caillou est communiquée au bouchon par l'intermédiaire de l'onde.
- le mouvement de la membrane d'un haut parleur crée une onde sonore qui se propage dans l'air : une partie de l'énergie (d'origine électrique) qui met la membrane en mouvement se propage jusqu'à notre oreille.
- la chute d'un domino peut entraîner une "onde de carambolage" se propageant sur toute une rangée de dominos alignés : l'énergie correspondant à la chute du premier domino se propage jusqu'au dernier. Ce dernier type d'onde est un peu particulier dans la mesure où une rangée de dominos ne constitue pas un milieu continu élastiquement déformable.

2.1.2 Les différents types d'ondes

On distinguera principalement deux types d'ondes :

Onde longitudinale

Si le déplacement correspondant à la perturbation est parallèle à la direction de propagation, l'onde est dite **longitudinale** ; c'est le cas pour une onde sonore dans un gaz : si on provoque, à l'aide d'un piston, une surpression dans un tuyau rempli d'air, celle-ci va se propager le long du tuyau comme le montre la figure 2.1.

Onde transversale

Si, au contraire, le déplacement correspondant à la perturbation est perpendiculaire à la direction de propagation, l'onde est dite **transversale** ; c'est le cas pour une onde se propageant sur une corde tendue

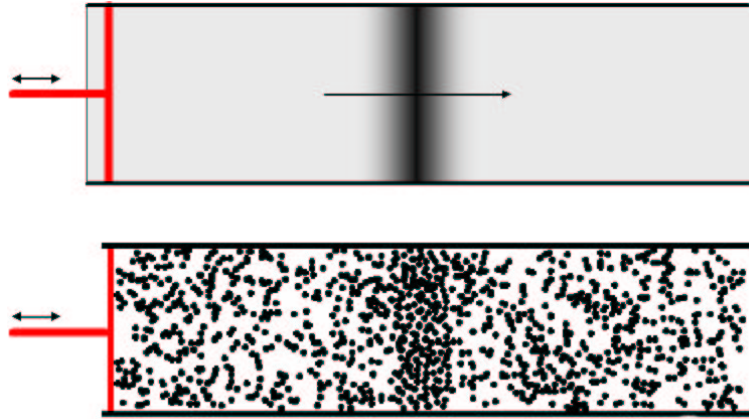


FIG. 2.1 – *Onde de compression dans un tuyau rempli d'air.*

(figure 2.2.

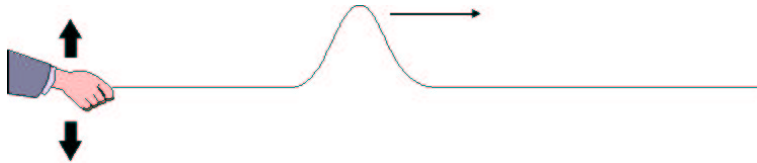


FIG. 2.2 – *Onde se propageant sur une corde tendue.*

Dans les milieux solides ces deux types d'ondes peuvent être présents simultanément, c'est le cas par exemple pour les ondes sismiques.

Autres types d'ondes

Il existe aussi des ondes de torsion, qui constituent une variante des ondes transversales ou encore les ondes à la surface des liquides, qui sont une combinaison d'ondes transversales et longitudinales : chaque molécule d'eau au voisinage de la surface décrit un mouvement circulaire dans un plan vertical, l'oscillation inclue donc un mouvement vertical transverse et un mouvement horizontal longitudinal (figure 2.3)

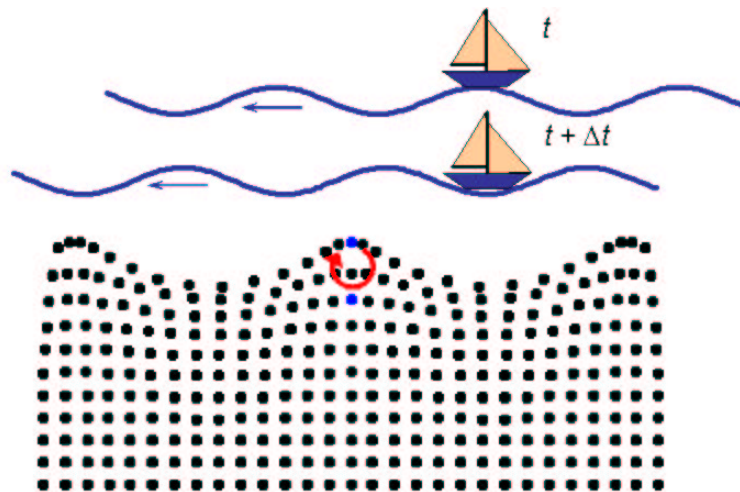


FIG. 2.3 – *Ondes à la surface de l'eau.*

2.1.3 Impulsions, ondes périodiques et trains d'ondes

Considérons le cas simple d'une onde transversale sur une corde, plus facile à visualiser qu'une onde longitudinale. Si on imprime à une corde tendue une impulsion de haut en bas celle-ci va se propager le long de la corde. La forme (ou le profil) de cette **impulsion ondulatoire** dépend du mouvement de la source tandis que sa vitesse de propagation c dépend des caractéristiques de la corde (masse linéique μ , tension T).

Si on imprime à la corde une série de plusieurs aller-retour, on a création et propagation d'un **train d'onde** de courte durée (figure 2.4).

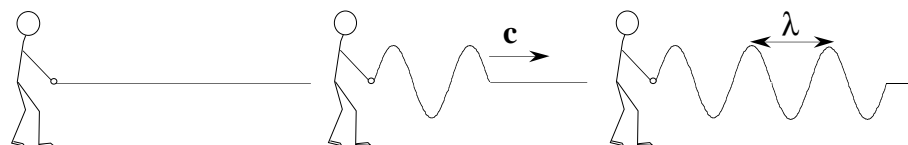


FIG. 2.4 – Propagation d'un train d'onde sur une corde tendue.

Si l'oscillation de la source est entretenue, on a création et propagation d'une **onde périodique**. En réalité le mouvement de la source a forcément un début et une fin et toute onde périodique n'est qu'un train d'onde de très longue durée.

On voit sur la figure 2.4 que la distance λ qui sépare deux maxima d'amplitude de l'onde correspond au temps $T = 1/f$ entre deux oscillations successives, l'onde se déplaçant avec la vitesse c on a la relation :

$$\lambda = cT = \frac{c}{f} \quad (2.1)$$

La longueur d'onde λ représente la périodicité spatiale de l'onde, tandis que le temps T représente la périodicité temporelle de l'onde.

2.1.4 Forme générale d'une fonction d'onde

Pour simplifier, considérons une onde à une dimension se propageant sans se déformer selon la direction Ox . Soit $y(x, t)$ le déplacement par rapport à la position d'équilibre du point d'abscisse x à l'instant t .

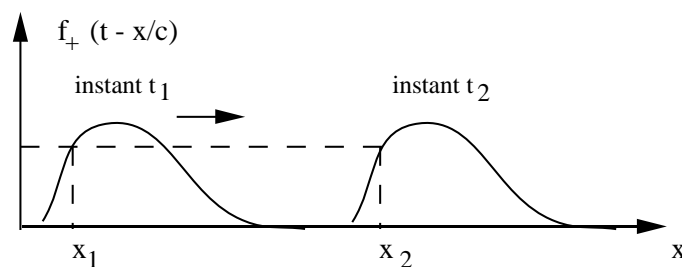


FIG. 2.5 – Propagation sans déformation d'une onde progressive f_+ à la vitesse c .

On voit, sur la figure 2.5, que le fait que l'onde représentée par $y(x, t)$ se propage sans se déformer impose que $y(x_1, t_1)$ soit égal à $y(x_2, t_2)$. Comme l'onde se propage à la vitesse c on a :

$$x_2 - x_1 = c(t_2 - t_1) \Leftrightarrow x_2 - ct_2 = x_1 - ct_1 \Leftrightarrow t_2 - x_2/c = t_1 - x_1/c$$

La fonction $y(x, t)$ doit donc être de la forme

$$y(x, t) = f_+(t - x/c) + f_-(t + x/c)$$

ou encore :

$$y(x, t) = g_+(x - ct) + g_-(x + ct)$$

f_+ ou g_+ correspondent à des ondes qui se propagent dans la direction des x positifs, f_- ou g_- correspondent à des ondes qui se propagent dans la direction des x négatifs.

Ces fonctions sont quelconques : il est juste nécessaire qu'elles soient deux fois différentiables.

Prenons un exemple : soit la fonction $f(x) = 5/(8x^2 + 1)$ représentant la forme d'une onde à l'instant $t = 0$, si on veut faire se propager cette onde dans la direction des x positifs avec la vitesse c il suffit de remplacer x par $x - ct$ la fonction d'onde progressive sera alors,

$$f_+(x, t) = \frac{5}{8(x - ct)^2 + 1}$$

si on représente $f_+(x, t)$ en fonction de x pour des instants successifs $t = 0$ s, $t = 1$ s, $t = 2$ s etc... on voit la progression de l'onde, illustrée par la figure 2.6

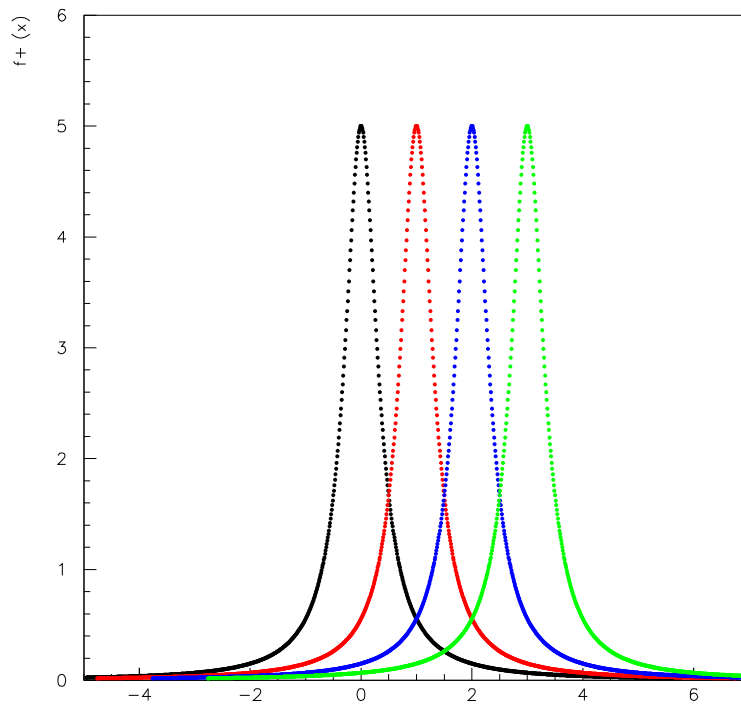


FIG. 2.6 – Propagation de l'onde $f_+(x, t) = 5/[8(x - ct)^2 + 1]$ à la vitesse $c = 1$ m/s. A $t = 0$ s le maximum est en $x = 0$, à $t = 1$ s il est en $x = 1$ m etc...

2.2 Analyse de Fourier d'un mouvement ondulatoire

2.2.1 Mouvement ondulatoire périodique

D'après le théorème de Fourier (Cf. cours de mathématiques), tout mouvement périodique de période $T = 2\pi/\omega$ peut être exprimé comme la superposition de mouvements sinusoïdaux de pulsations ω , 2ω , ..., $n\omega$, ...

Une onde périodique, qui peut s'écrire $F(t - x/c)$ ou $G(x - ct)$, est une fonction périodique du temps en un point fixé de l'espace qui peut s'exprimer sous la forme :

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \quad (2.2)$$

Les différents termes de pulsation ω , 2ω , ... sont appelés harmoniques, l'harmonique d'ordre 1 (correspondant à ω) est appelé fondamental.

Les coefficients a_n et b_n sont reliés à la fonction $F(t)$ par les relations :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos(n\omega t) dt ; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin(n\omega t) dt \quad (2.3)$$

La détermination des coefficients a_n et b_n d'une fonction périodique constitue son **analyse harmonique**. Ce développement, dit en série de Fourier, fait intervenir un nombre infini de termes. Dans la pratique on peut reconstituer avec une bonne approximation la fonction $F(t)$ en se limitant à un nombre fini de termes. La figure 2.7 montre l'exemple de la synthèse approchée d'une fonction périodique en dents de scie à partir de ses 6 premiers harmoniques.

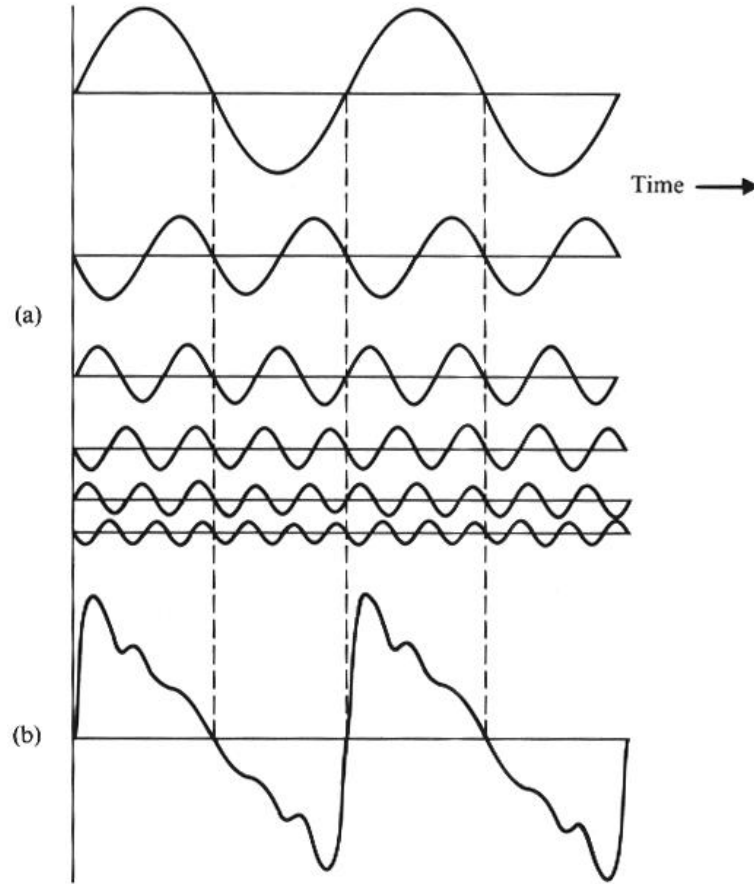


FIG. 2.7 – Synthèse d'une fonction périodique en dents de scie à partir de ses 6 premiers harmoniques.

De la même façon, à un instant donné, l'onde $G(x - ct)$, est une fonction périodique de l'espace $G(x)$, de période $\lambda = 2\pi/k$ et donc, en remplaçant ω par k , et t par x on a :

$$G(x) = \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a'_n \cos(nkx) + b'_n \sin(nkx)] \quad (2.4)$$

avec :

$$a'_n = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} G(x) \cos(nkx) dx ; \quad b'_n = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} G(x) \sin(nkx) dx \quad (2.5)$$

Le mouvement ondulatoire périodique $F(t - x/c)$, qui est à la fois une fonction périodique de l'espace (période $\lambda = 2\pi/k$) et du temps (période $T = 2\pi/\omega$), peut donc se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned}
F(t - x/c) = & \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega t - kx) + b_1 \sin(\omega t - kx) \\
& + a_2 \cos(2\omega t - 2kx) + b_2 \sin(2\omega t - 2kx) \\
& + a_3 \cos(3\omega t - 3kx) + b_3 \sin(3\omega t - 3kx) \\
& + \dots + a_n \cos(n\omega t - nkx) + b_n \sin(n\omega t - nkx) + \dots
\end{aligned}$$

c'est donc une superposition de mouvements ondulatoires sinusoïdaux de pulsations $\omega, 2\omega, \dots, n\omega, \dots$ et de longueurs d'onde $\lambda, \lambda/2, \dots, \lambda/n, \dots$

Dans la réalité, un mouvement ondulatoire strictement périodique n'existe pas : un mouvement réel doit nécessairement comporter un début et une fin. Si la durée du mouvement est très grande devant la période alors il est possible d'effectuer une analyse harmonique et la décomposition en série de Fourier constitue une bonne approximation, dans le cas contraire, on doit remplacer la décomposition en série de Fourier par une décomposition en **intégrales de Fourier** (ou transformation de Fourier). Dans ce cas, le mouvement ondulatoire pourra être considéré comme une somme **continue** de mouvements ondulatoires sinusoïdaux d'amplitudes $A(\omega)$. Cependant, le calcul de $A(\omega)$ (ou de $A(k)$, puisque $\omega = kc$) dans le cas général sort du cadre de ce cours et nous n'étudierons que l'exemple simple du **train d'onde** de manière qualitative.

2.2.2 Train d'onde

On appelle train d'onde une onde sinusoïdale monochromatique de durée Δt limité dans le temps, et donc d'extension $\Delta x = c\Delta t$ limitée dans l'espace. Un exemple de train d'onde, de pulsation $\omega_0 = 4\pi$ rd/s, est représentée sur la figure 2.8, il peut être décrit en $x = 0$ par la fonction $F(t)$:

$$F(t) = \cos(4\pi t) \text{ pour } 1 < t < 5 \text{ s.} \quad ; \quad F(t) = 0 \text{ sinon} \quad (2.6)$$

On peut montrer que cette onde est la superposition d'une infinité d'ondes sinusoïdales d'amplitudes $A(\omega)$ avec des pulsations allant de 0 à l'infini. Cependant, comme le montre la figure 2.8, $A(\omega)$ n'est appréciable que pour des valeurs de ω comprises dans un intervalle $\Delta\omega$ autour de $\omega_0 = 4\pi$ tel que :

$$\Delta\omega \approx \frac{2\pi}{\Delta t} \approx \frac{2\pi}{4} \approx 1.57 \text{ rd/s} \quad (2.7)$$

Ce qui est équivalent à dire que $A(k)$ n'est appréciable que pour des valeurs de k comprises dans un intervalle Δk autour de $k_0 = \omega_0/c$ tel que : $\Delta k \approx 2\pi/(c\Delta t)$.

La relation 2.7 indique que, plus le train d'onde est court, plus l'intervalle de pulsations nécessaire pour le représenter devra être grand, ou encore : plus la région dans laquelle le train d'onde est localisé est petite plus l'intervalle de longueurs d'onde nécessaire pour le représenter devra être grand.

2.3 Vitesse de groupe

La vitesse $c = \omega/k$ pour une onde sinusoïdale de pulsation ω et de longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$ est la **vitesse de phase**, c'est la vitesse de propagation que l'on observe pour une onde "continue", qui n'a ni début ni fin, c'est à dire un train d'onde de longueur infinie. Dans la réalité on a toujours affaire à des trains d'ondes de longueurs finies, qui, comme nous venons de le montrer sont la superposition d'ondes sinusoïdales de différentes pulsations. Si la vitesse de propagation est indépendante de la fréquence, comme c'est le cas dans un milieu non dispersif, alors toutes les composantes de l'onde se propagent à la même vitesse $c = \omega/k$. Si la vitesse de propagation dépend de la fréquence, comme c'est le cas dans un milieu dispersif, chaque composante de l'onde a une vitesse différente et la situation devient nettement plus compliquée...

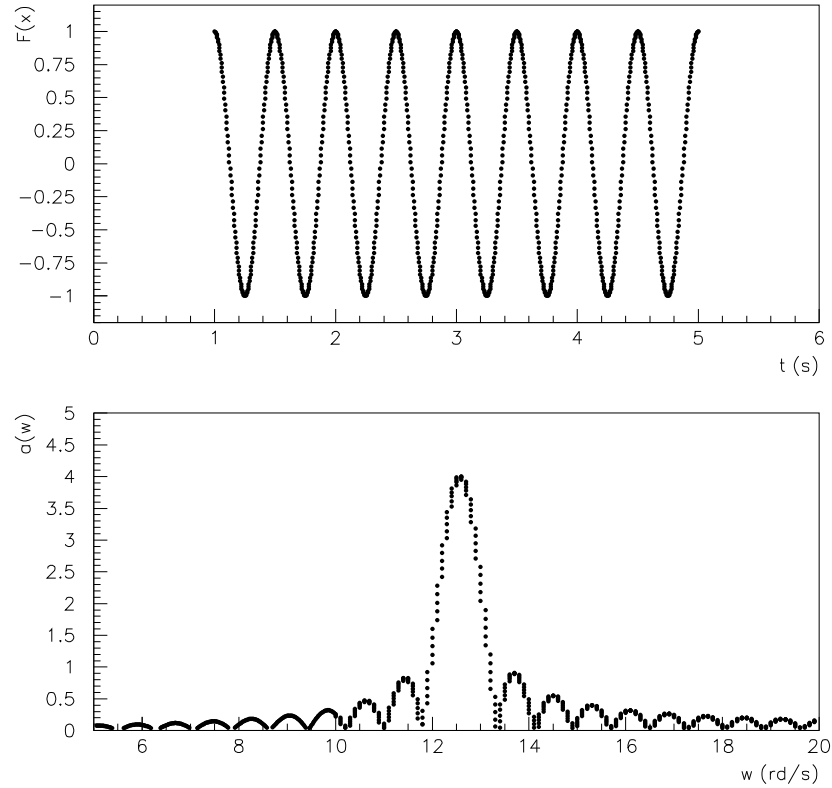


FIG. 2.8 – Figure du haut : train d'onde défini par la relation 2.6 ; figure du bas amplitude $a(\omega)$ des ondes sinusoïdales dont le train d'onde est la superposition.

Pour comprendre ce qui se passe, examinons le cas simple d'une onde constituée de la superposition de deux ondes de même amplitude et de pulsations voisines ω_1 et ω_2 avec $\Delta\omega = |\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1$:

$$Y(x, t) = A \cos(\omega_1 t - k_1 x) + A \cos(\omega_2 t - k_2 x) \quad (2.8)$$

Soit, en transformant la somme de cosinus en un produit :

$$Y(x, t) = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{k_1 - k_2}{2}x\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{k_1 + k_2}{2}x\right)$$

Puisque $\Delta\omega = |\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1$ on peut poser :

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega \approx \omega_1 \approx \omega_2$$

De même, puisque $k = \omega/c$, on a $\Delta k = |k_1 - k_2| \ll k_1$:

$$\frac{k_1 + k_2}{2} = k \approx k_1 \approx k_2$$

et on peut écrire :

$$Y(x, t) = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right) \cos(\omega t - kx)$$

La relation précédente représente une onde sinusoïdale de pulsation ω dont l'amplitude est modulée par le facteur :

$$\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right) \quad (2.9)$$

Cette modulation se propage à la vitesse :

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \approx \frac{d\omega}{dk}$$

cette vitesse est appelée **vitesse de groupe**. Si on représente l'onde $Y(x, t)$, (figure 2.9) on peut voir cette onde comme un succession de trains d'ondes qui se propagent avec la vitesse v_g .

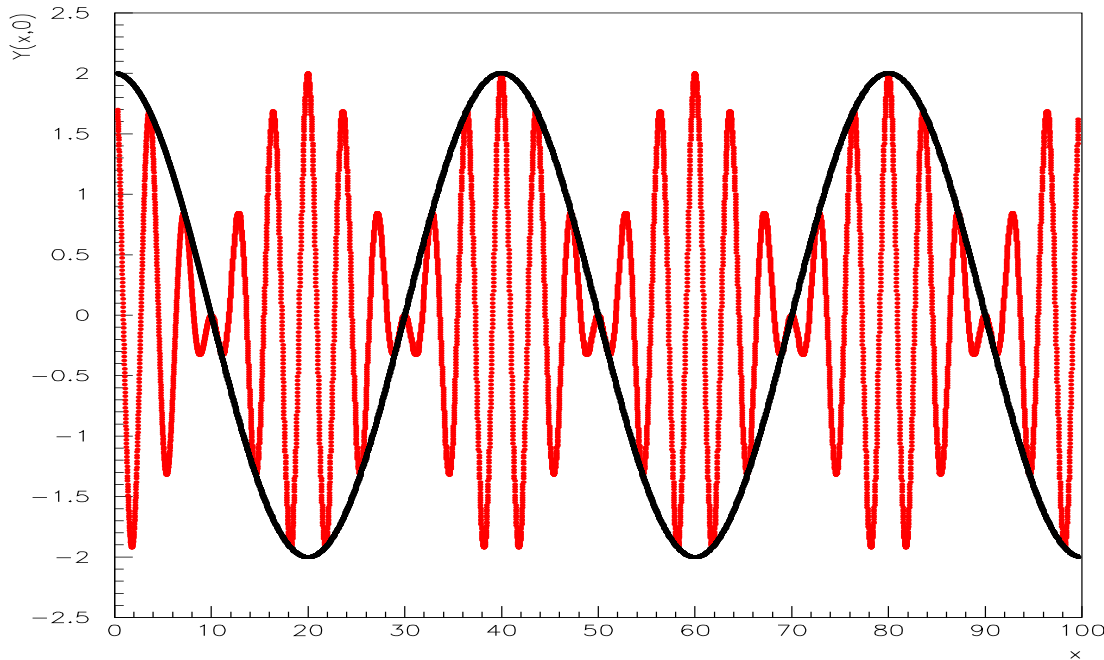


FIG. 2.9 – Onde $Y(x, t)$ définie par la relation 2.8 pour $\omega_1 = 10\pi$ rd/s, $\omega_2 = 11\pi$ rd/s et $c=2000$ m/s. La courbe en gris représente $Y(x, t)$ en fonction de x à $t = 0$. La courbe en noir représente la modulation définie par la relation 2.9.

Puisque la vitesse de phase est $c = \omega/k$, on a :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(kc) = c + k \frac{dc}{dk}$$

Si la vitesse de phase est indépendante de la longueur d'onde alors $dc/dk = 0$ et $v_g = c$, donc dans les milieux non dispersifs il n'y a pas de différence entre vitesse de phase et vitesse de groupe. Dans les milieux dispersifs, la vitesse de groupe peut être plus grande ou plus petite que la vitesse de phase.

Nous retiendrons que la vitesse de propagation du signal, c'est à dire de la modulation, est la vitesse de groupe v_g .

2.4 Propagation le long d'une chaîne infinie d'oscillateurs couplés

Un milieu matériel est toujours constitué d'un grand nombre d'atomes en interaction : si on essaie de les rapprocher les uns des autres ils se repoussent, si on essaie de les éloigner les uns des autres ils s'attirent. Ils se comportent donc comme un ensemble de masses attachées entre elles par des ressorts. La façon la plus simple de modéliser un tel système est de considérer une chaîne infinie d'oscillateurs couplés identiques, à une dimension.

2.4.1 Equation du mouvement

Nous allons donc considérer une chaîne infinie d'oscillateurs couplés analogue à celle du paragraphe précédent. Pour mieux visualiser le phénomène que nous voulons mettre en évidence, nous allons étudier les oscillations transverses d'une chaîne composée de masses m identiques, distantes de d et reliées entre elles par un fil tendu avec une tension T_0 . (figure 2.10).

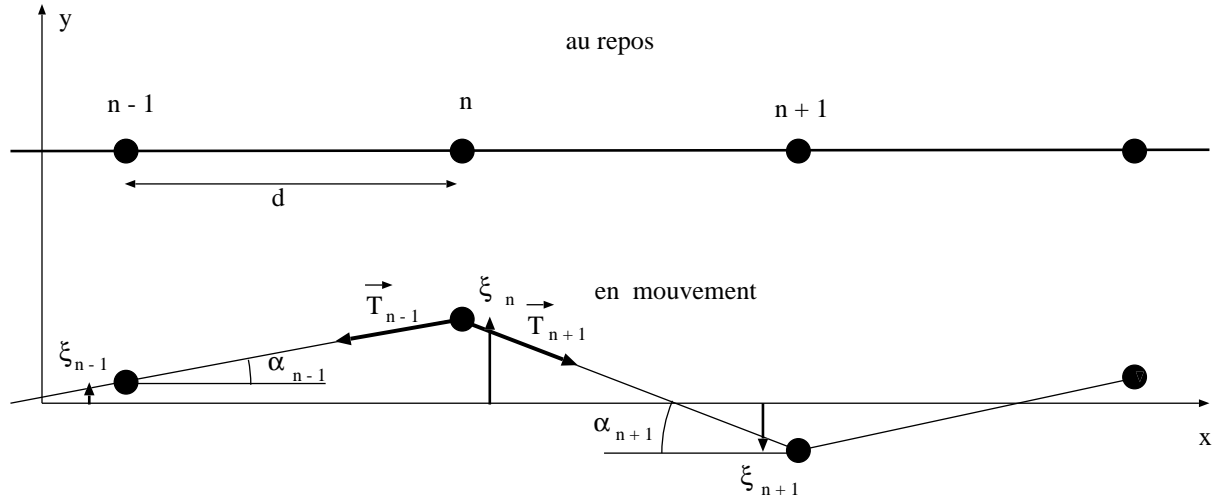


FIG. 2.10 – Chaîne infinie d'oscillateurs couplés identiques, au repos et en mouvement.

Nous allons examiner dans quelle mesure une oscillation forcée appliquée à l'une des masses de la chaîne peut se **propager** aux autres par l'intermédiaire des forces de rappel, dues à la tension du fil, et qui agissent comme des ressorts de couplage.

Pour cela on suppose que les masses ne peuvent se déplacer que selon Oy et on note $\xi_n(t)$ le déplacement de la masse n située en $x = x_n$ par rapport à sa position d'équilibre $\xi_n = 0$.

Les déplacements $\xi_n(t)$ restent toujours très petits devant d et on suppose que le module de la tension \vec{T}_n reste constant : $|\vec{T}_n| = T_0$ quelque soit n

La relation de la dynamique appliquée à la masse vibrant autour de la position x_n donne :

$$m \frac{d^2 \xi_n}{dt^2} \vec{u}_y = \vec{T}_{n-1} + \vec{T}_{n+1} \quad (2.10)$$

Projetons cette équation selon la direction du mouvement Oy :

$$m \frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = -|\vec{T}_{n-1}| \sin(\alpha_{n-1}) - |\vec{T}_{n+1}| \sin(\alpha_{n+1}) \quad (2.11)$$

$$\xi_n \ll d \Rightarrow \sin(\alpha_{n-1}) \approx \tan(\alpha_{n-1}) \approx \alpha_{n-1} \approx \frac{\xi_n - \xi_{n-1}}{d}$$

de manière analogue on a $\sin(\alpha_{n+1}) \approx (\xi_n - \xi_{n+1})/d$. De plus $|\vec{T}_{n-1}| = |\vec{T}_{n+1}| = T_0$.

On obtient donc, dans la limite des petites oscillations :

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 \xi_n}{dt^2} &= -T_0 \frac{\xi_n - \xi_{n-1}}{d} - T_0 \frac{\xi_n - \xi_{n+1}}{d} \\ \Rightarrow m \frac{d^2 \xi_n}{dt^2} &= \frac{T_0}{d} (\xi_{n-1} - 2\xi_n + \xi_{n+1}) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Cette équation est analogue à l'équation (16) du chapitre précédent en remplaçant la raideur K par le coefficient T_0/d , qui à la même dimension.

Supposons que l'on applique une force sinusoïdale à la masse située en $x = 0$ de façon à ce qu'elle soit animée d'un mouvement selon Oy décrit en notation complexe par :

$$\tilde{\xi}_0 = ae^{i\omega t}$$

En l'absence d'amortissement l'amplitude de l'oscillation, si elle se propage le long de la chaîne, doit rester constante. D'autre part si la masse n°0 est mise en mouvement à $t = 0$, la masse n°1 sera mise en mouvement avec un certain retard, l'énergie ne pouvant pas se propager à une vitesse infinie. Pour un mouvement sinusoïdal, ce retard va se traduire par un déphasage : soit φ le déphasage entre deux masses successives. On aura donc :

$$\tilde{\xi}_{n-1} = \tilde{\xi}_n e^{i\varphi} \quad ; \quad \tilde{\xi}_{n+1} = \tilde{\xi}_n e^{-i\varphi}$$

Ce qui signifie simplement que la masse n°($n + 1$) présente un retard de phase φ par rapport à la masse n° n .

Dans ces conditions, la relation 2.12 donne :

$$\begin{aligned} -m\omega^2 \tilde{\xi}_n &= \frac{T_0}{d} (-2\tilde{\xi}_n + \tilde{\xi}_n e^{i\varphi} + \tilde{\xi}_n e^{-i\varphi}) \\ \Rightarrow \omega^2 + \frac{T_0}{dm} (-2 + e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) &= 0 \end{aligned}$$

En posant $\omega_0 = \sqrt{T_0/md}$ et utilisant le fait que :

$$2 - e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2 - 2\cos\varphi = 4\sin^2(\varphi/2)$$

on trouve finalement la relation :

$$\sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{\omega^2}{4\omega_0^2} \Rightarrow |\sin(\varphi/2)| = \frac{\omega}{2\omega_0} \quad (2.13)$$

2.4.2 Condition de propagation

La relation 2.13 ne peut être vérifiée que si $\omega < 2\omega_0$. Conformément à ce qui a déjà été mis en évidence pour les oscillations libres du chapitre précédent, on retrouve que les pulsations supérieures à la pulsation de coupure $2\omega_0$ ne peuvent pas se propager dans la chaîne.

Quant aux vibrations de pulsations $\omega < 2\omega_0$, elles se propagent le long de la chaîne avec un déphasage entre deux masses successives égal à :

$$\varphi = \pm 2 \arcsin \left(\frac{\omega}{2\omega_0} \right) \quad ; \quad \omega < 2\omega_0 \quad (2.14)$$

Le signe + correspond à des vibrations se déplaçant vers les $x > 0$, le signe - correspond à des vibrations se déplaçant vers les $x < 0$

Le mouvement réel de la masse située en $x_n = nd$ est (pour $\varphi > 0$) :

$$\xi_n = \mathcal{R}(\tilde{\xi}_n) = a \cos(\omega t - n\varphi)$$

Deux masses p et q auront un déplacement identique à tout instant si elles sont distantes de $\lambda = |p - q|d$ tel que :

$$|p - q|\varphi = 2\pi \Rightarrow \lambda = |p - q|d = \frac{2\pi d}{\varphi}$$

Ceci est illustré par la figure 2.11

$2\pi/\omega$ est la période temporelle T du phénomène de vibration (ne pas confondre avec la tension T_0)

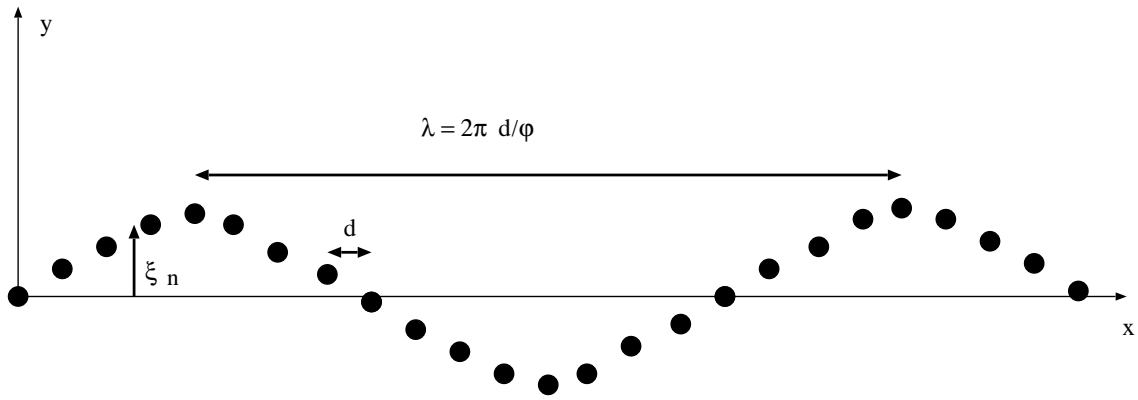


FIG. 2.11 – Deux masses séparées de $\lambda = 2\pi d/\varphi$ ont un déplacement identique à tout instant.

λ représente sa périodicité spatiale.

$k = 2\pi/\lambda$ est le nombre d'onde.

$\varphi = 2\pi d/\lambda = kd$ est le déphasage entre deux masses successives

La figure 2.12 montre la courbe représentative de la relation 2.13.

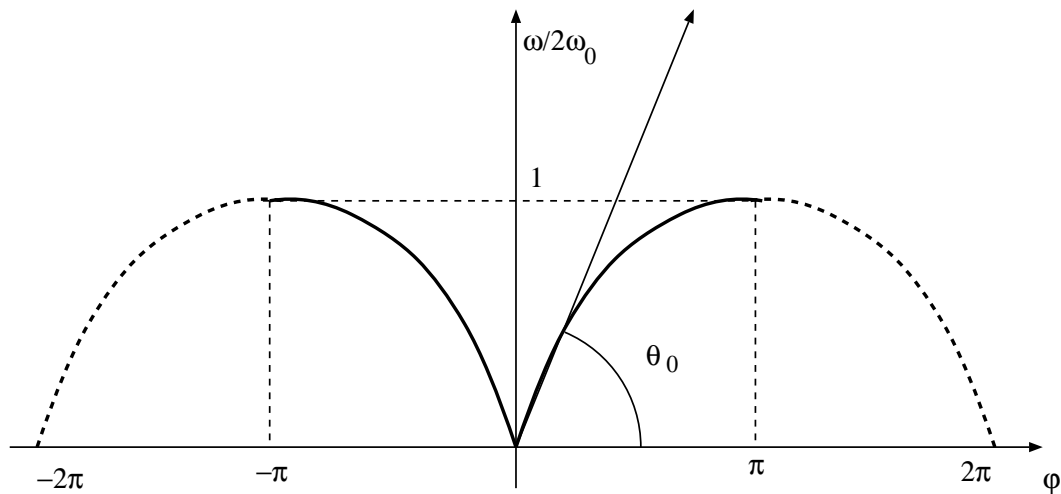


FIG. 2.12 – Courbe représentative de la relation 2.14.

Au voisinage de l'origine, on a $\varphi = kd \ll 1$ et la courbe peut être approximée par sa tangente à l'origine de pente $\tan(\theta_0) = 1/2$, en effet :

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\omega}{2\omega_0} \right) = \frac{d}{d\varphi} \sin(\varphi/2) = \frac{1}{2} \text{ si } \varphi \rightarrow 0$$

On a donc :

$$\omega = \varphi\omega_0 = kd\omega_0 = kd\sqrt{\frac{T_0}{md}}$$

La vibration met un temps T pour se déplacer de λ , sa vitesse de propagation est donc égale à :

$$c = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = d\sqrt{\frac{T_0}{md}} = \sqrt{\frac{T_0 d}{m}} ; \quad kd \ll 1$$

2.4.3 Approximation des milieux continus

Dans la limite $kd \ll 1 \Leftrightarrow d \ll \lambda$ la vitesse de propagation est constante, indépendante de la pulsation ω on dit que l'on est dans un régime de propagation **non dispersif** : toutes les fréquences se propagent avec la même vitesse, c'est l'approximation des milieux continus.

En effet, si les masses sont réparties continuellement sur le fil de sorte que $d \rightarrow 0$ avec $\mu = m/d$ masse linéique et $nd = x$ on trouve la loi de propagation d'une onde sinusoïdale transversale sur une corde tendue :

$$\xi_n(t) = a \cos(\omega t - n\varphi) = a \cos(\omega t - nkd)$$

$$\Rightarrow \xi(x, t) = a \cos(\omega t - kx)$$

avec la **vitesse de phase** :

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

Remarque : L'approximation des milieux continus est valable chaque fois que la longueur d'onde est très grande devant la distance entre deux oscillateurs individuels. c'est généralement le cas pour les ondes mécaniques dans les solides, les liquides ou les gaz, pour lesquels les "oscillateurs individuels" sont les atomes ou molécules qui composent le milieu.

2.4.4 Propagation dispersive

Cependant lorsque ω croît et se rapproche de ω_0 , l'approximation $\varphi \approx \omega/\omega_0$ n'est plus valable et la vitesse de phase ω/k n'est plus constante. On a une relation de dispersion $k(\omega)$: des vibrations de pulsations différentes ne se propagent pas avec la même vitesse, on dit que l'on est dans un régime de propagation **dispersif**.

Lorsque ω atteint la valeur maximum $2\omega_0$ on a :

$$\sin(\varphi/2) = 1 \Rightarrow \varphi = \pi$$

deux masses successives vibrent en opposition de phase, la longueur d'onde est minimum et égale à $2d$ (figure 2.13).

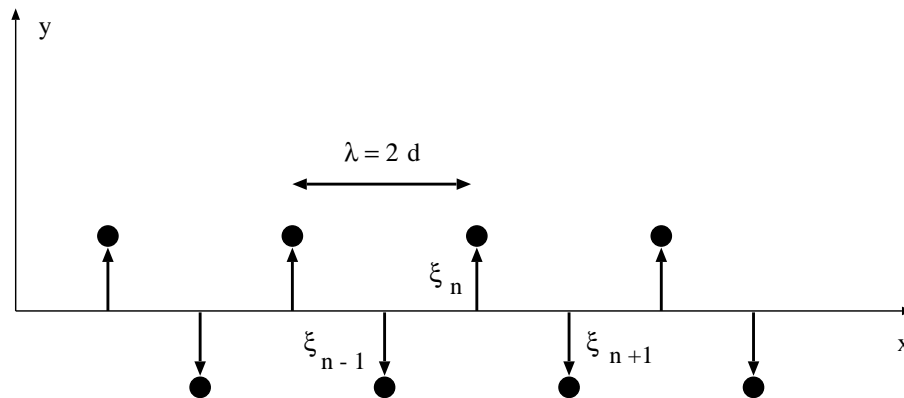


FIG. 2.13 – Cas limite $\omega = 2\omega_0$: deux masses successives vibrent en opposition de phase.

2.5 Equation de propagation dans un milieu continu

2.5.1 Cas d'un milieu à une dimension : propagation le long d'une corde

Nous avons vu que, dans le cas de la chaîne de masses m réparties sur un fil tendu, le passage à la limite continue, où l'espacement d entre les masses tend vers zéro, nous a permis de trouver la loi de propagation d'une onde sinusoïdale transversale sur une corde tendue de masse linéique $\mu = m/d$. Nous allons maintenant établir **l'équation de propagation** correspondante.

Considérons un élément de corde de longueur dx et de masse μdx (figure 2.14), avec les hypothèses suivantes :

1. La corde est tendue avec une tension de module constant T_0 .
2. Le poids de l'élément de corde dx est négligeable devant la tension T_0 .
3. le mouvement a lieu selon la direction Oy , orthogonale à la direction Ox de la corde au repos.
4. les mouvements sont de faibles amplitudes, de sorte que $\alpha \ll 1 \Rightarrow \sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$

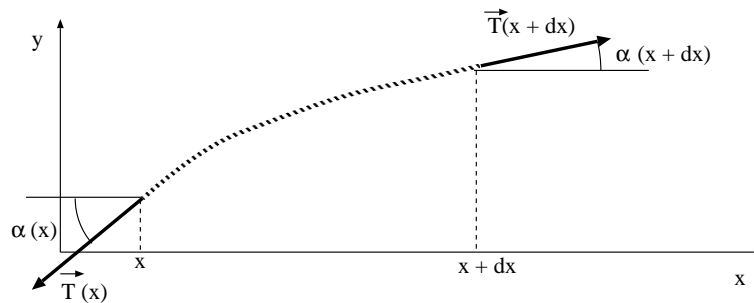


FIG. 2.14 – Élément de corde de longueur dx soumis aux forces de tension $\vec{T}(x)$ et $\vec{T}(x+dx)$.

L'équation de la dynamique appliquée à l'élément dx nous permet d'écrire :

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{u}_y = \vec{T}(x) + \vec{T}(x+dx)$$

Projetons cette équation selon la direction du mouvement Oy :

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T_0 \sin[\alpha(x)] + T_0 \sin[\alpha(x+dx)]$$

l'hypothèse (4) permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \sin[\alpha(x)] &\approx \tan[\alpha(x)] = \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_x \\ \sin[\alpha(x+dx)] &\approx \tan[\alpha(x+dx)] = \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x+dx} \end{aligned}$$

d'où :

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \left(\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x+dx} - \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_x \right) = T_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) dx = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

On trouve finalement l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (2.15)$$

Quelle est la dimension du facteur T_0/μ ?

$$\frac{T_0}{\mu} = \frac{[M][L][T]^{-2}}{[M][L]^{-1}} = \left(\frac{[L]}{[T]}\right)^2$$

T_0/μ est donc le carré d'une vitesse, nous poserons donc

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

c est la vitesse de propagation de l'onde dont l'équation peut s'écrire de façon générale :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (2.16)$$

2.5.2 Solution de l'équation de propagation à une dimension

Nous avons vu que la forme générale d'une fonction d'onde devait être :

$$y(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$$

Nous devons donc vérifier que $y(x, t)$ est solution de l'équation 2.16.

Effectuons le changement de variables :

$$p = x - ct \quad \text{et} \quad q = x + ct$$

La dérivée du déplacement y par rapport à x s'écrit alors :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial p} + \frac{\partial y}{\partial q}$$

et la dérivée seconde :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial p^2} + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 y}{\partial q^2}$$

De même par rapport à t :

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial t} = c \left(-\frac{\partial y}{\partial p} + \frac{\partial y}{\partial q} \right)$$

et :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial p^2} - 2 \frac{\partial^2 y}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 y}{\partial q^2} \right)$$

En remplaçant dans l'équation 2.16 il reste, après simplifications :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial p \partial q} = 0$$

La dérivée par rapport à p de $\partial y / \partial q$ est nulle ; $\partial y / \partial q$ est donc une fonction de q seul :

$$\frac{\partial y}{\partial q} = f(q)$$

y est la primitive de $f(q)$, notée $F(q)$, à laquelle on peut ajouter une constante par rapport à q , c'est à dire une fonction de p seul :

$$y = F(q) + G(p) = F(x - ct) + G(x + ct)$$

Un calcul semblable montrerait que toute fonction $y = F(t - x/c) + G(t + x/c)$ convient également.

2.5.3 Solutions sinusoïdales

Lorsque la source d'une onde, située en $x = 0$ est un oscillateur harmonique, son déplacement au cours du temps est de la forme $y(0, t) = A \cos(\omega t - \varphi)$. L'onde émise dans la direction des x positifs est une fonction $f_+(t - x/c)$ qui en $x = 0$ doit s'identifier au mouvement de la source : $f_+(t) = A \cos(\omega t - \varphi)$. Le déplacement en x est donc

$$f_+(t - x/c) = y(x, t) = A \cos[\omega(t - x/c) - \varphi] \quad (2.17)$$

La fonction de deux variables $y(x, t)$ présente une double périodicité (figure 2.15) :

– Si on se place en un point fixé de l'espace $x = x_0$ on obtient une fonction du temps :

$$y(x_0, t) = A \cos[\omega(t - x_0/c) - \varphi] = A \cos(\omega t - \phi) \quad (2.18)$$

avec $\phi = \omega x_0/c + \varphi$, dont la période temporelle est $T = 2\pi/\omega$.

– Si on se place à un instant donné $t = t_0$ (ce qui revient à prendre une photographie de l'onde) on obtient une fonction de l'espace :

$$y(x, t_0) = A \cos[\omega(t_0 - x/c) - \varphi] = A \cos(\omega x/c - \phi') \quad (2.19)$$

avec $\phi' = \omega t_0 + \varphi$ dont la période spatiale, ou longueur d'onde, est $\lambda = 2\pi c/\omega$.

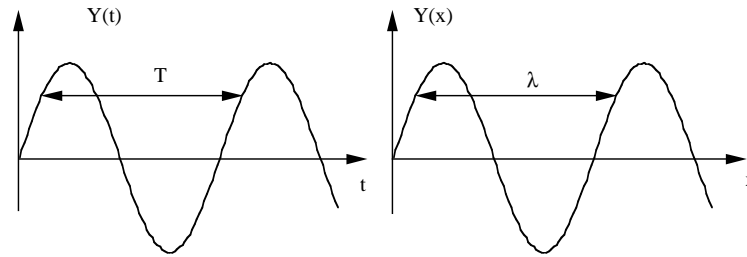


FIG. 2.15 – Périodicité spatiale λ et temporelle T d'une onde sinusoïdale.

Lorsqu'une onde se propage dans un milieu donné, c'est la source qui impose la fréquence $f = 1/T$ et c'est le milieu qui détermine la vitesse de propagation c . La longueur d'onde est alors donné par $\lambda = cT$.

Compte tenu des relations qui existent entre la pulsation ω , la période T , la fréquence f etc... L'onde sinusoïdale peut s'écrire de différentes façons, toutes équivalentes :

$$y(x, t) = A \cos[\omega(t - x/c) - \varphi] \quad (2.20)$$

$$= A \cos[2\pi(t/T - x/\lambda) - \varphi] \quad (2.21)$$

$$= A \cos(\omega t - kx - \varphi) \quad (2.22)$$

Où :

- A est l'**amplitude** (en Pascal pour une onde sonore).
- ω est la **pulsation** (rad.s^{-1})
- λ est la **longueur d'onde** (m), ou période spatiale.
- $k = 2\pi/\lambda$ est le **nombre d'onde** (m^{-1})
- $T = 2\pi/\omega$ est la **période temporelle** (s).
- La quantité $(\omega t - kx - \varphi)$ est la **phase**, tandis que $(-kx - \varphi)$ est la **phase à l'origine du temps** et $-\varphi$ la **phase à l'origine du temps et de l'espace**.

2.6 Surfaces d'ondes

Dans un milieu à trois dimensions, on appelle surface d'onde toute surface dont les points vibrent en phase, c'est à dire qui, à un instant donné t_0 , ont tous la même phase.

Ondes planes, vecteur d'onde, plan d'onde

Dans le cas d'une onde où la source est un plan qui oscille (onde sonore au voisinage de la membrane d'un haut-parleur par exemple), l'onde émise se propage dans la direction Ox perpendiculairement au plan source (figure 2.16a) on a affaire à une **onde plane sinusoïdale**, d'amplitude constante, que l'on peut écrire sous la forme :

$$y(x, t) = A \cos(\omega t - kx - \varphi)$$

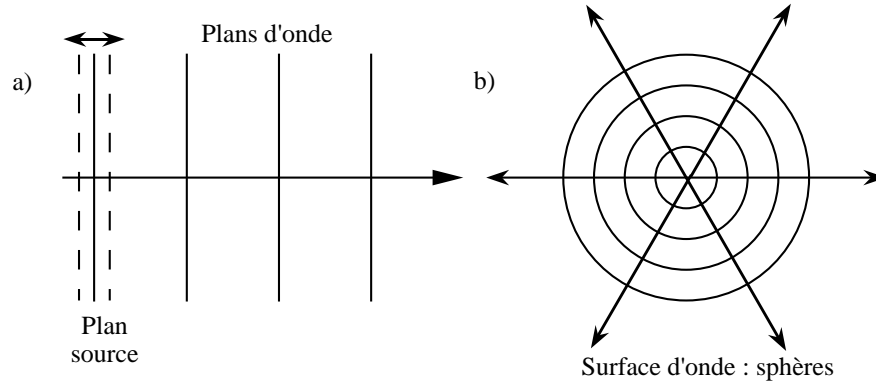


FIG. 2.16 – Surfaces d'ondes a) plane ; b) sphérique.

Pour une onde plane se propageant dans une direction quelconque \vec{u} de l'espace, on définit le **vecteur d'onde** :

$$\vec{k} = k\vec{u} = \frac{\omega}{c}\vec{u}$$

Pour une onde plane sinusoïdale on a alors la forme générale :

$$y(x, y, z, t) = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi) = A \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z - \varphi)$$

Si l'on veut que l'onde ne dépende que d'une seule coordonnée d'espace, ce qui est toujours possible pour une onde plane, il faut choisir un des axes du repère selon la direction de propagation \vec{u} .

Les surfaces d'onde vérifient l'équation :

$$\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} = C^{te} \quad (2.23)$$

Le produit $\vec{k} \cdot \vec{r}$ représente la projection du vecteur courant $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ sur la direction de propagation, ce produit est constant si le point M est situé dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation. Les surfaces d'onde sont donc des plans orthogonaux à la direction de propagation ; ceci est illustré par la figure 2.17.

Si u est l'abscisse d'un plan d'onde selon la direction de propagation, l'équation 2.23 se ramène à : $ku - \omega t = C^{te}$ et le plan d'onde se déplace avec la vitesse de phase :

$$V_\phi = \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{C^{te} + \omega t}{k} \right) = \frac{\omega}{k} = c$$

Ondes sphériques

Si la source est une petite sphère dont le volume varie périodiquement, par raison de symétrie, la fonction d'onde ne peut dépendre que de la variable r , l'expression de la phase est donc du type : $\omega t - kr - \varphi$. Dans ce cas les surfaces équiphasse vérifient :

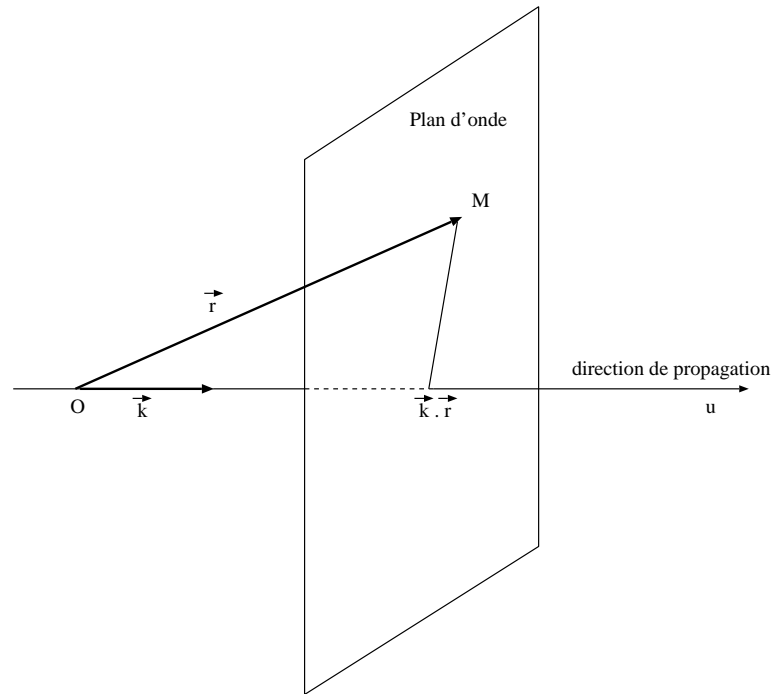


FIG. 2.17 – *Plan d'onde, orthogonal à la direction de propagation.*

$$\omega t - kr - \varphi = C^{te} \Rightarrow r = C^{te}$$

Les surfaces d'onde sont donc des sphères centrées sur la source en $r = 0$ (figure 2.16b).

A la différence de l'onde plane, l'amplitude d'une onde sphérique n'est pas constante car l'énergie doit se répartir sur des surfaces de plus en plus grandes lorsque l'onde s'éloigne de la source. En effet, si \mathcal{P}_0 est la puissance de la source, cette puissance à une distance r doit se répartir sur une surface $S = 4\pi r^2$, la puissance par unité de surface $d\mathcal{P}/dS$ en r sera donc :

$$\frac{d\mathcal{P}(r)}{dS} = \frac{\mathcal{P}_0}{4\pi r^2}$$

Cette puissance par unité de surface, ou intensité, est, comme nous allons le montrer plus loin, proportionnelle au carré de l'amplitude :

$$\frac{d\mathcal{P}(r)}{dS} = \alpha A^2 = \frac{\mathcal{P}_0}{4\pi r^2} \Rightarrow A(r) = C^{te}/r$$

On voit donc que l'amplitude décroît en $1/r$. La forme générale d'une onde sphérique est donc :

$$y(r, t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr - \varphi) \quad (2.24)$$

Cependant, à une distance D de la source, grande devant la longueur d'onde, on pourra toujours approximer une onde sphérique à une onde plane d'amplitude constante sur une distance $d \ll D$.

2.7 Les ondes sonores

Les ondes sonores se propagent en général dans l'air (mais aussi dans les liquides et les solides) donc dans des milieux à trois dimensions. Cependant on peut restreindre l'étude de l'onde sonore au cas où celle-ci ne dépend que d'une seule variable d'espace : c'est le cas de l'**onde plane**.

Si on envoie à un haut-parleur, dont la membrane est plane, un signal électrique tel que cette membrane se déplace brutalement vers l'avant, celle-ci va comprimer l'air, engendrant une légère surpression p qui va se propager le long d'un axe x perpendiculaire à la surface de la membrane.

Si la membrane du haut-parleur a maintenant un mouvement d'oscillation périodique, cette oscillation va se propager le long de l'axe x de manière similaire à l'onde sur la corde avec la même relation $\lambda = cT$ entre la distance λ qui sépare deux maxima successifs de pression et la vitesse de propagation c .

On aura ainsi engendré une onde plane. Bien entendu ceci ne constitue qu'une approximation valable au voisinage de la membrane : lorsque l'onde s'éloigne elle se disperse dans tout l'espace et plusieurs variables d'espace sont alors nécessaires pour la décrire. Pour éviter ce problème on pourra considérer des ondes planes se propageant dans un tuyau cylindrique de génératrices parallèles à la direction de propagation.

2.7.1 Equation de propagation

Position du problème

L'état d'équilibre de l'air est défini par la pression d'équilibre uniforme P_{atm} qui correspond à une masse volumique d'équilibre ρ_0 . Nous étudierons la propagation de petites perturbations p par rapport à l'équilibre, sous forme d'ondes planes selon la direction Ox :

$$P_{tot} = P_{atm} + p(x, t) \quad ; \quad p(x, t) \ll P_{atm}$$

Loi de compressibilité

On suppose le gaz parfait et les transformations adiabatiques réversibles de sorte que, pour une tranche de gaz d'épaisseur Δx et de volume V , on a :

$$P_{tot} V^\gamma = C^{te} \Rightarrow \frac{dP_{tot}}{P_{tot}} + \gamma \frac{dV}{V} = 0 \quad (2.25)$$

Le coefficient de compressibilité χ est défini par :

$$\chi = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P_{tot}}$$

Si dV est la variation de volume de la tranche de gaz correspondant à la surpression $p(x, t)$, on peut écrire :

$$dP_{tot} = [P_{atm} + p(x, t)] - P_{atm} = p(x, t) \ll P_{atm}$$

d'où :

$$\chi = -\frac{1}{V} \frac{dV}{p(x, t)}$$

et d'après 2.25 :

$$\frac{p(x, t)}{P_{tot}} + \gamma \frac{dV}{V} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{V} \frac{dV}{p(x, t)} = \frac{1}{\gamma P_{tot}}$$

d'où :

$$\chi = \frac{1}{\gamma P_{tot}} \approx \frac{1}{\gamma P_{atm}} = C^{te}$$

Considérons une tranche d'air de surface S , comprise, à l'équilibre, entre x et $x + \Delta x$ selon la direction de propagation x (figure 2.18). La face en x subit un déplacement $u(x, t)$ et se trouve en $x + u(x, t)$. Au même instant, la face en $x + \Delta x$ subit un déplacement $u(x + \Delta x, t)$ et se trouve en $x + \Delta x + u(x + \Delta x, t)$.

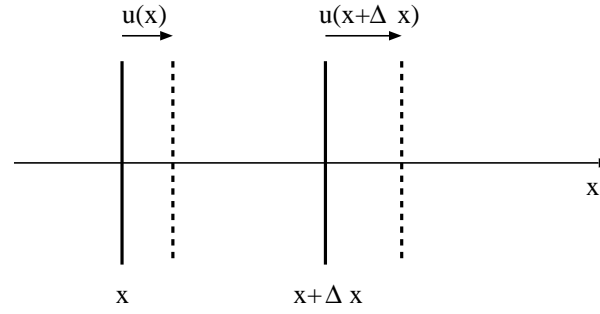


FIG. 2.18 – Positions d'une tranche d'air à l'équilibre (traits pleins) et hors d'équilibre (traits tiretés).

On suppose Δx assez petit pour écrire :

$$u(x + \Delta x, t) = u(x, t) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Delta x$$

L'épaisseur de la tranche varie donc de $(\partial u / \partial x) \Delta x$ et son volume de :

$$dV = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Delta x S = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} V$$

La pression acoustique $p(x, t)$ est donc reliée au déplacement $u(x, t)$ par :

$$p(x, t) = -\frac{dV}{\chi V} = -\frac{1}{\chi} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (2.26)$$

Equation de propagation

Sur chacune des faces de la tranche d'épaisseur Δx la pression s'exerce suivant des directions opposées et la force résultante s'écrit :

$$F = SP_{tot}(x, t) - SP_{tot}(x + \Delta x, t)$$

en développant au premier ordre, sachant que $P_{tot} = P_{atm} + p$ où P_{atm} est une constante :

$$P_{tot}(x + \Delta x, t) - P_{tot}(x, t) = \frac{\partial P_{tot}}{\partial x} \Delta x = \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \Delta x$$

La force résultante est :

$$F = -S \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x$$

Cette force est égale au produit de la masse d'air $\rho_0 S \Delta x$ par l'accélération :

$$F = -S \Delta x \frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0 S \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

ce qui nous permet d'obtenir une seconde relation :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.27)$$

En dérivant l'équation 2.26 par rapport à x , on obtient pour $u(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0 \chi} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (2.28)$$

C'est l'équation de l'onde de déplacement longitudinal dans le gaz à la vitesse :

$$c = \sqrt{\frac{1}{\rho_0 \chi}} \quad (2.29)$$

De la même façon on peut trouver, en dérivant l'équation 2.26 deux fois par rapport à t :

$$\frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{\chi} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -\frac{1}{\chi} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0 \chi} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} \quad (2.30)$$

C'est l'équation de l'onde de pression longitudinale dans le gaz à la vitesse c

On pourrait également montrer que la densité ρ ou encore la vitesse de déplacement $v = \partial u / \partial t$ obéissent à la même équation.

Une onde sonore peut donc être considérée aussi bien comme une onde de déplacement $u(x, t)$ des molécules d'air autour de leur position d'équilibre que comme une onde de pression $p(x, t)$ ou encore de densité $\rho(x, t)$; ces trois grandeurs obéissant à la même équation de propagation.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.31)$$

Domaines de fréquences sonores

L'oreille humaine perçoit les sons pour des fréquences comprises entre 20 Hz et 20 kHz environ, ce domaine pouvant varier d'un individu à l'autre (selon l'âge en particulier). Cela correspond à des longueurs d'ondes $\lambda = c/\nu$ avec $c = 343 \text{ m/s}$:

$$17\text{m} \geq \lambda \geq 17\text{mm}$$

Les **ultrasons** sont des ondes sonores dont les fréquences sont au dessus du domaine audible humain. Certaines d'espèces animales (insectes par exemple) ont leur maximum de sensibilité à des fréquences élevés atteignant 100 200kHz. Les ultrasons sont utilisés en médecine pour les échographies avec des fréquences entre 1 et 5MHz voire 20MHz en ophtalmologie.

Les **infrasons** sont des ondes sonores dont les fréquences sont au dessous du domaine audible humain. Il peuvent être produits avec de grandes intensités lors des seismes et, bien que non audibles par l'oreille humaine, ils peuvent provoquer des sensations de malaise et d'angoisse.

Célérité du son

Pour l'air, assimilé à un gaz parfait de température T et de compressibilité $\chi = 1/(\gamma P_{atm})$, on a $\rho_0 = M/V_M$ où M est la masse molaire du gaz et $V_M = RT/P_{atm}$ le volume d'une mole, d'où :

$$c^2 = \frac{1}{\rho_0 \chi} = \gamma P_{atm} \frac{V_M}{M} = \frac{\gamma RT}{M}$$

Pour l'air : $\gamma = 1,4$ et $M \approx 29 \text{ g}$.

$$\Rightarrow c(\text{m/s}) \approx 20\sqrt{T(\text{K})}$$

Par exemple : dans l'air à 20°C $c = 20\sqrt{293} = 342 \text{ m/s}$.

Une des hypothèses importantes utilisée pour établir l'équation de propagation et l'expression de la célérité c est que la pression acoustique $p(x, t)$ est très petite devant la pression atmosphérique P_{atm} . Dans le cas d'un son très intense les équations 2.28 et 2.29 ne sont plus valables et on constate que les sons intenses se propagent plus vite que les sons de faibles intensités. Par exemple, dans le cas du son au niveau de la gueule d'un canon, la pression acoustique peut dépasser la pression atmosphérique et on peut, à une certaine distance, entendre le bruit du canon avant l'ordre de tir.

2.7.2 Intensité acoustique

Pour une onde sonore se propageant selon la direction Ox dans un milieu de densité ρ_0 avec la vitesse c , on définit l'intensité acoustique I_{ac} comme **la puissance moyenne par unité de surface transportée par l'onde**.

Soit ds une surface élémentaire perpendiculaire à la direction de propagation. L'onde sonore met en vibration la surface ds , si cette vibration correspond à un déplacement $u(x, t)$ le travail reçu est :

$$dW = Fu(x, t) = p(x, t)u(x, t)ds$$

d'où une puissance :

$$d\mathcal{P}_{ac} = dW/dt = p(x, t)\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}ds$$

Soit $v = \partial u(x, t)/\partial t$ la vitesse des molécules qui vibrent autour de leur position d'équilibre (attention : il ne faut pas confondre v avec la vitesse de propagation c de l'onde). On a alors $d\mathcal{P}_{ac} = pdsv$, donc $I = \langle d\mathcal{P}_{ac}/dS \rangle = \langle pv \rangle$.

Pour une onde sonore progressive on a : $u(x, t) = f(t - x/c) = f(q)$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial q}$$

de même :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial q} \\ \Rightarrow \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

Donc d'après 2.26, pour une onde sonore se propageant dans un gaz de densité ρ_0 :

$$p(x, t) = -\frac{1}{\chi} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{c\chi} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \rho_0 cv(x, t) \quad (2.32)$$

d'où l'expression de l'intensité acoustique :

$$I_{ac} = \langle pv \rangle = \rho_0 c \langle v^2 \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{\rho c} = \frac{p_{eff}^2}{\rho c} \quad (2.33)$$

Où $p_{eff}^2 = \langle p^2 \rangle$ est le carré de la pression efficace, définie comme la valeur moyenne du carré de la pression. L'intensité I_{ac} s'exprime en Watt/m²

Remarque : pour une onde régressive $u(x, t) = g(t + x/c)$ on aurait trouvé :

$$p(x, t) = -\rho_0 cv(x, t) \quad (2.34)$$

Ce qui aurait conduit à la même expression pour l'intensité.

Echelle de mesure des sons

La perception du son par le système auditif dépend des caractéristiques physiques des sons. Un son d'intensité trop faible n'est pas perçu, tandis qu'un son trop fort peut provoquer une douleur, voire une destruction de l'appareil auditif. Il existe donc des limites d'intensité en dehors desquelles l'écoute est impossible. De plus, ces limites dépendent fortement de la fréquence des sons : les fréquences trop basses (infrasons) de même que les fréquences trop élevées (ultrasons) ne sont pas perçues. Pour une "oreille moyenne", les courbes du seuil d'audition et du seuil intolérable sont représentées en fonction de la fréquence sur la figure 2.19 (résultat de l'examen d'un grand nombre de sujets "acoustiquement normaux" entre 18 et 25 ans).

On peut voir sur ces courbes qu'il existe entre les surpressions p comprises entre le seuil d'audition et le seuil intolérable pour l'oreille humaine un rapport $p_{max}/p_{min} \approx 10^7$. La gamme de variation de la pression acoustique est donc très grande, bien que p reste toujours très inférieure à la pression atmosphérique : $p(x, t) \ll P_{atm} = 10^5$ Pa.

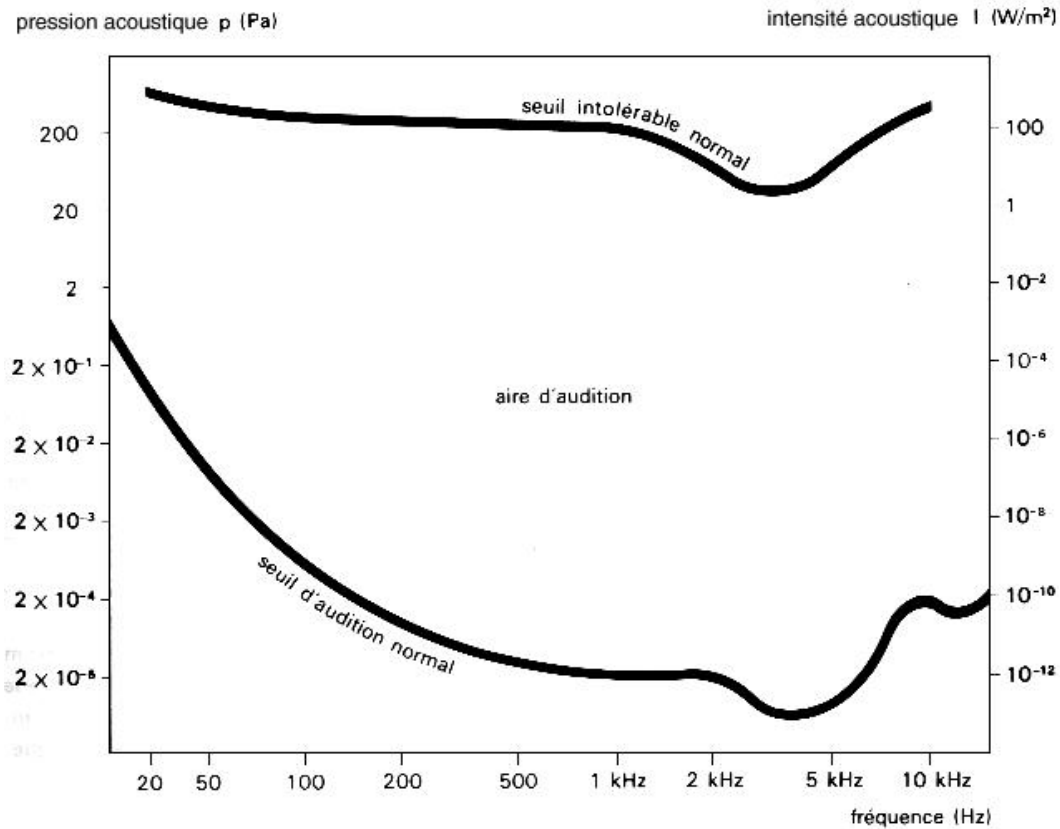


FIG. 2.19 – Courbes du seuil d'audition et du seuil intolérable pour l'oreille humaine.

L'intensité étant proportionnelle au carré de la pression, il en résulte que la gamme des intensités audibles s'étend sur 14 décades : $I_{max}/I_{min} \approx 10^{14}$!

En fait, notre système auditif éprouve, approximativement, la même impression de croissance lorsque l'intensité physique varie de 1 à 10 ou de 100 à 1000 par exemple. Ceci se traduit par la "loi de Weber-Fechner" qui dit que "la sensation croît à peu près comme le logarithme de l'excitation".

C'est pourquoi on choisit de mesurer les intensités sur une échelle logarithmique, en **décibels**. On parle alors du **niveau physique d'intensité acoustique** L_{dB} :

$$L_{dB} = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) = 20 \log \left(\frac{p}{p_0} \right) \quad (2.35)$$

Où $I_0 = 10^{-12} \text{W/m}^2$ et $p_0 = 2.10^{-5} \text{Pa}$ sont respectivement des intensité et pression de référence. Attention : il s'agit ici du logarithme décimal.

Lorsque le niveau sonore varie au cours du temps on peut définir un **niveau équivalent** qui correspond à la moyenne de l'énergie pendant l'intervalle de temps ΔT :

$$L_{eq} = 10 \log \frac{1}{T} \int_0^{\Delta T} \frac{I}{I_0} dt \quad (2.36)$$

Le tableau 2.1 donne l'ordre de grandeur de quelques niveaux sonores.

Niveau d'intensité (dB)	Source sonore	Intensité (W/m ²)	Pression (Pa)
200	Record mondial pour un son continu (1998).	10 ⁸	2.10 ⁵
140	Seuil intolérable.	100	200
120	Réacteur d'avion à 10 m.	1	20
100	Marteau-piqueur à 2 m.	10 ⁻²	2
80	Rue bruyante.	10 ⁻⁴	0.2
60	Conversation vive.	10 ⁻⁶	2.10 ⁻²
40	Conversation normale.	10 ⁻⁸	2.10 ⁻³
20	Studio d'enregistrement.	10 ⁻¹⁰	2.10 ⁻⁴
10	Laboratoire d'acoustique.	10 ⁻¹¹	6.10 ⁻⁵
0	Seuil d'audition.	10 ⁻¹²	2.10 ⁻⁵

TAB. 2.1 – *Ordre de grandeur de quelques niveaux sonores.*

2.7.3 Impédance acoustique

Considérons une onde plane progressive se propageant dans un tuyau de section S (une onde plane infinie transporterait une énergie infinie et n'a pas de réalité physique). Si $F(x, t)$ est la force mettant en mouvement la tranche d'air de surface S avec la vitesse $v(x, t)$ on a $F(x, t) = p(x, t)S$, soit, d'après l'équation 2.32 :

$$F(x, t) = p(x, t)S = \rho_0 c v(x, t)S$$

On définit alors l'impédance acoustique du tuyau de section S comme la quantité :

$$Z_{ac} = \frac{1}{S^2} \frac{F(x, t)}{v(x, t)} = \frac{\rho_0 c}{S} \quad (2.37)$$

On remarque que :

- Pour une onde régressive $g(t + x/c)$ se propageant vers les x négatifs on aurait, d'après la relation 2.34 : $Z_{ac} = -\rho_0 c/S$
- Du fait de la relation de proportionnalité entre force et vitesse pour une onde purement progressive (ou purement régressive), l'impédance acoustique est une constante appelée "impédance itérative". Mais ce n'est pas le cas pour un mélange d'ondes progressives et régressives.
- L'impédance acoustique n'a pas la même dimension que l'impédance mécanique définie par $Z_{meca} = \text{force}/\text{vitesse}$, on a en fait : $Z_{ac} = Z_{meca}/[L^4]$

La puissance acoustique instantanée transportée par l'onde progressive est :

$$\mathcal{P}_{ac} = p v S = \rho_0 c S v^2 = \frac{p^2}{\rho_0 c} S$$

on peut, en comparant avec l'expression de la puissance électrique :

$$\mathcal{P}_{elec} = UI = ZI^2 = \frac{U^2}{Z}$$

faire les analogies suivantes :

$$\begin{aligned} I &\leftrightarrow Sv \\ U &\leftrightarrow p \\ Z = \frac{\mathcal{P}_{elec}}{I^2} &\leftrightarrow Z_{ac} = \frac{\mathcal{P}_{ac}}{(Sv)^2} = \frac{pvS}{(Sv)^2} = \frac{p}{Sv} = \frac{\rho_0 c}{S} \end{aligned}$$

Cette analogie explique le facteur $1/S^2$ entre les impédances mécanique et acoustique.

2.8 Réflexion et transmission

Nous allons examiner maintenant la transmission et la réflexion d'une onde $u(x, t)$ se propageant selon l'axe Ox , à la frontière $x = 0$ entre deux milieux (figure 2.20). Le nombre d'onde et l'impédance valent respectivement :

- k_1 et Z_1 pour l'onde incidente du côté $x < 0$,
- k_1 et $-Z_1$ pour l'onde réfléchie du côté $x < 0$,
- k_2 et Z_2 pour l'onde transmise du côté $x > 0$,

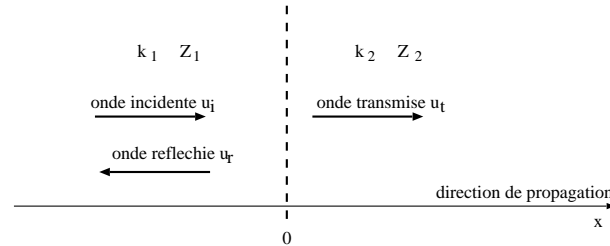


FIG. 2.20 – Transmission et réflexion d'une onde $u(x, t)$ se propageant selon l'axe Ox .

2.8.1 Coefficients de réflexion et de transmission

Soient R et T les coefficients de réflexion et de transmission. Si on prend le cas d'une onde sinusoïdale, on a pour les déplacement $u(x, t) = \mathcal{R}(\tilde{u})$:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_i(x, t) &= Ae^{j(\omega t - k_1 x)} \\ \tilde{u}_r(x, t) &= RAe^{j(\omega t + k_1 x)} \\ \tilde{u}_t(x, t) &= T Ae^{j(\omega t - k_2 x)}\end{aligned}$$

et pour les vitesses $v(x, t) = \mathcal{R}(\tilde{v})$:

$$\begin{aligned}\tilde{v}_i(x, t) &= j\omega Ae^{j(\omega t - k_1 x)} \\ \tilde{v}_r(x, t) &= j\omega RAe^{j(\omega t + k_1 x)} \\ \tilde{v}_t(x, t) &= j\omega T Ae^{j(\omega t - k_2 x)}\end{aligned}$$

Par continuité on doit avoir, pour le déplacement en $x = 0$:

$$\tilde{u}_i(0, t) + \tilde{u}_r(0, t) = \tilde{u}_t(0, t) \Rightarrow 1 + R = T$$

et pour la force, d'après 2.37 :

$$F_i(0, t) + F_r(0, t) = F_t(0, t) \Rightarrow Z_1 S^2 v_i(0, t) - Z_1 S^2 v_r(0, t) = Z_2 S^2 v_t(0, t) \Rightarrow Z_1(1 - R) = Z_2 T$$

Le système d'équations :

$$\begin{aligned}1 + R &= T \\ Z_1(1 - R) &= Z_2 T\end{aligned}$$

Permet de tirer R et T sous la forme :

$$R = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (2.38)$$

$$T = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad (2.39)$$

Remarque : Ces coefficients de réflexion et de transmission ne s'appliquent qu'au cas où une onde acoustique passe d'un milieu à un autre dans un tuyau de section constante.

2.8.2 Conservation de l'énergie

La loi de conservation de l'énergie implique que la somme algébrique de la puissance incidente \mathcal{P}_i et de la puissance réfléchie \mathcal{P}_r doit être égale à la puissance transmise \mathcal{P}_t :

$$\mathcal{P}_i + \mathcal{P}_r = \mathcal{P}_t$$

Si on se place en $x = 0$, à la frontière entre les deux milieux, on, a pour une surface commune S :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_i &= F_i(0, t)v_i(0, t) = Z_1 S^2 v_i^2(0, t) \\ \mathcal{P}_r &= F_r(0, t)v_r(0, t) = -Z_1 S^2 v_r^2(0, t) = -Z_1 S^2 R^2 v_i^2(0, t) \\ \mathcal{P}_t &= F_t(0, t)v_t(0, t) = Z_2 S^2 v_t^2(0, t) = Z_2 S^2 T^2 v_i^2(0, t)\end{aligned}$$

D'où les relations :

$$\mathcal{P}_r = -R^2 \mathcal{P}_i = -\left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2 \mathcal{P}_i \quad (2.40)$$

$$\mathcal{P}_t = \frac{Z_2}{Z_1} T^2 \mathcal{P}_i = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \mathcal{P}_i \quad (2.41)$$

La puissance réfléchie est affectée d'un signe négatif car elle se propage dans le sens des x négatifs.

Examinons les deux cas limites :

tuyau fermé en $x = 0$: dans ce cas $Z_2 \rightarrow \infty$ et $\mathcal{P}_r = -\mathcal{P}_i$, $\mathcal{P}_t = 0$, la puissance de l'onde est entièrement réfléchie.

tuyau ouvert en $x = 0$: dans ce cas $Z_2 \rightarrow 0$. Là encore on a $\mathcal{P}_r = -\mathcal{P}_i$, $\mathcal{P}_t = 0$, la puissance de l'onde est entièrement réfléchie.

Dans les deux cas précédents il n'y a pas de puissance transmise. Ce résultat, assez intuitif pour le cas du tuyau fermé, l'est moins pour le cas du tuyau ouvert. En fait, si l'on veut qu'un son "sorte" d'un tuyau dans lequel il se propage il faut réaliser une adaptation d'impédance entre la valeur $Z_1 = \rho_0 c / S_1$ à l'intérieur du tuyau et la valeur $Z_2 \approx 0$ à l'extérieur, pour cela on évase la sortie du tuyau : un profil exponentiel constitue la meilleure solution pour une transmission maximum de la puissance. Ceci explique la forme des trompettes, trombones, tubas et autres hélicons pour lesquels le son est créé par la vibration des lèvres de l'instrumentiste à une extrémité et doit impérativement sortir par l'autre (ce n'est pas le cas pour les flutes, hautbois... pour lesquels le son est produit par des biseaux ou des anches).

Remarque : Pour ces deux cas limites le coefficient de réflexion R vaut $R = 1$ pour le tuyau ouvert (réflexion sans changement de signe) et $R = -1$ pour le tuyau fermé (réflexion avec changement de signe). Par contre le coefficient de transmission T n'a pas de sens pour ces cas limites puisqu'il n'y a plus de tuyau au-delà de $x = 0$.

2.9 Ondes stationnaires

Dans les exemples précédents on a, dans la région de l'espace $x < 0$, superposition d'une onde incidente et d'une onde réfléchie :

$$\begin{aligned}\tilde{u}_i(x, t) &= Ae^{j(\omega t - k_1 x)} \\ \tilde{u}_r(x, t) &= RAe^{j(\omega t + k_1 x)}\end{aligned}$$

Nous n'étudierons que les cas simples où l'onde est entièrement réfléchie, avec ou sans changement de signe ($|R| = 1$) : c'est le cas pour une onde sonore se propageant dans un tuyau ouvert ($R = 1$) ou fermé ($R = -1$), pour un ébranlement se propageant sur une corde dont l'extrémité est fixée ($R = -1$) ou entièrement libre ($R = 1$).

2.9.1 Ondes stationnaires dans un tuyau sonore

Cas où l'onde est entièrement réfléchie sans changement de signe

On a dans ce cas :

$$\tilde{u}(x, t) = \tilde{u}_i(x, t) + \tilde{u}_r(x, t) = Ae^{j\omega t} [e^{jk_1x} + e^{-jk_1x}] = 2A \cos(k_1x) e^{j\omega t}$$

Nous obtenons donc pour le déplacement réel :

$$u(x, t) = \mathcal{R}(\tilde{u}) = 2A \cos(k_1x) \cos(\omega t)$$

Cette fonction ne représente pas une onde qui se propage mais une **onde stationnaire** qui s'exprime comme le produit d'une amplitude variable avec x par une fonction du temps.

Cas où l'onde est entièrement réfléchie avec changement de signe

On a dans ce cas :

$$\tilde{u}(x, t) = \tilde{u}_i(x, t) + \tilde{u}_r(x, t) = Ae^{j\omega t} [-e^{jk_1x} + e^{-jk_1x}] = -2jA \sin(k_1x) e^{j\omega t}$$

Nous obtenons donc pour le déplacement réel :

$$u(x, t) = \mathcal{R}(\tilde{u}) = 2A \sin(k_1x) \sin(\omega t) = 2A \sin(2\pi x/\lambda) \sin(\omega t) \quad (2.42)$$

on a de nouveau une onde stationnaire, examinons la variation de l'amplitude avec x pour ce cas (figure 2.21). Elle est :

- nulle pour $x = N\lambda/2$ avec N entier : ces points sont appelés nœuds de vibrations.
- maximum pour $x = (N + 1/2)\lambda/2$ avec N entier : ces points sont appelés ventres de vibrations.

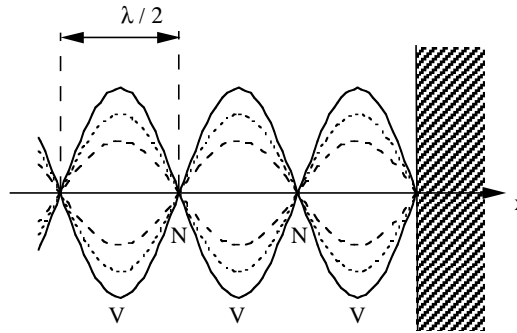


FIG. 2.21 – Ondes stationnaires par composition d'une onde sinusoïdale incidente avec une onde sinusoïdale réfléchie sur une paroi fixe.

Si maintenant on place une seconde surface immobile parfaitement rigide en $x = -L$ on aura en plus la condition $u(-L, t) = 0$ quelque soit t , ce qui impose :

$$\sin \frac{2\pi L}{\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2L}{n}$$

La présence de ce second obstacle, qui délimite une région finie de l'espace, a pour effet essentiel de quantifier les longueurs d'ondes : seules les ondes stationnaires ayant des longueurs d'onde $\lambda_n = 2L/n$, où n est un nombre entier, peuvent s'établir dans ce milieu.

La relation $\lambda = c/f$ impose également une quantification des fréquences

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \Rightarrow f_n = n \frac{c}{2L} \quad (2.43)$$

Ces fréquences sont les **fréquences propres** qui correspondent aux **modes propres** de vibration du milieu.

Dans le cas d'un milieu à une dimension, comme un tuyau sonore, les fréquences propres sont des multiples de la plus basse fréquence, appelée **fréquence fondamentale**, ces fréquences multiples de la fréquence fondamentale sont appelées **harmoniques**.

Pour un tuyau sonore fermé à ses deux extrémités l'expression du déplacement pour le mode n est donné par la relation 2.42, avec :

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad ; \quad \omega_n = n \frac{\pi c}{L}$$

d'où :

$$u_n(x, t) = 2A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \quad (2.44)$$

2.9.2 Modes propres d'une corde vibrante

Les vibrations d'une corde étant plus faciles à visualiser que les vibrations de l'air dans un tuyau, nous allons étudier plus en détail les modes propres d'une corde vibrante de longueur L , fixée à ses deux extrémités.

Cette situation correspond aux conditions $Y(0, t) = Y(-L, t) = 0$ où $Y(x, t)$ représente le déplacement transverse de la corde. Les fréquences des ondes stationnaires qui peuvent s'établir sont donc données par la relation 2.43 et la fonction $Y_n(x, t)$ correspondant à la fréquence propre f_n est :

$$Y_n(x, t) = 2A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

Si on met en mouvement la corde dans un de ces modes propres elle restera dans ce mode, si on met en mouvement la corde de manière quelconque, son mouvement sera une combinaison linéaire de modes propres du type :

$$Y(x, t) = \sum_n Y_n(x, t) = \sum_n a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \quad (2.45)$$

Où a_n représente l'amplitude du mode n .

Calculons maintenant l'énergie d'une corde vibrante dont le mouvement est donné par la relation 2.45. Cette énergie peut se mettre sous la forme :

$$W = \sum_n W_n$$

où W_n est l'énergie correspondant au mode n .

L'élément de corde compris entre x et $x + dx$ peut être considéré, pour le mode n , comme un oscillateur harmonique de masse $m = \mu dx$, d'amplitude : $\mathcal{A}_n(x) = a_n \sin(n\pi x/L)$ et de pulsation $\omega_n = n\pi c/L$ son énergie est donc :

$$dW_n = \frac{1}{2} m \omega_n^2 \mathcal{A}_n^2 = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 a_n^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

L'énergie totale pour le mode n s'obtient en intégrant sur la longueur de la corde :

$$W_n = \int_0^L dW_n = \frac{1}{2} \frac{\mu n^2 \pi^2 c^2}{L^2} \int_0^L a_n^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Soit, en transformant $\sin^2 a$ en $(1 - \cos 2a)/2$:

$$W_n = \frac{1}{2} \frac{\mu n^2 \pi^2 c^2 a_n^2}{L^2} \left[\int_0^L \frac{dx}{2} - \frac{a_n^2}{2} \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right]$$

La seconde intégrale est nulle, il reste :

$$W_n = \frac{1}{2} \frac{\mu n^2 \pi^2 c^2 a_n^2}{L^2} \frac{L}{2} = \frac{\mu n^2 \pi^2 c^2 a_n^2}{4L}$$

Et l'énergie totale de la corde sera donnée par :

$$W = \sum_n W_n = \sum_n \frac{\mu n^2 \pi^2 c^2 a_n^2}{4L}$$

En remarquant que $\mu c^2 = T_0$, cette énergie peut encore s'écrire :

$$W = \sum_n W_n = \frac{T_0 \pi^2}{4L} \sum_n n^2 a_n^2 \quad (2.46)$$

On remarque que, à amplitude égale, le mode n de pulsation $\omega_n = n\pi c/L$ (ou de fréquence $f_n = nc/2L$) contient n^2 fois plus d'énergie que le mode fondamental de fréquence $f_1 = c/2L$.

Les cordes vibrantes sont essentiellement utilisées pour produire des sons musicaux lorsqu'elles sont pincées (guitare), frottées (violon) ou frappées (piano). Les cordes elles mêmes ne sont pas capables de mettre directement l'air en mouvement pour produire une onde sonore d'intensité suffisante, c'est pourquoi elles sont toujours couplées à une caisse de résonance à laquelle elles transmettent leur énergie afin que celle-ci soit rayonnée sous forme d'ondes sonores (une autre solution consiste à transformer leur mouvement en un signal électrique amplifiable à volonté comme dans les guitares électriques). Cependant on peut considérer que l'intensité des sons émis est à peu près proportionnelle à l'énergie W qui, d'après 2.46, est elle même proportionnelle à T_0/L . Pour un instrument possédant plusieurs cordes de longueurs égales, celles-ci devront donc avoir des tensions voisines pour un bon équilibre d'intensité entre les basses et les aigues. Dans ces conditions, pour obtenir des fréquences fondamentales différentes il faut faire varier la masse linéique μ selon la loi :

$$f = \frac{c}{2L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} \Rightarrow \mu = \frac{T_0}{4L} \frac{1}{f^2}$$

Ainsi, la corde de Mi grave ($f = 82.5$ Hz) d'une guitare, doit avoir une masse linéique environ 16 fois plus élevée que la corde de Mi aigue ($f = 330$ Hz).

2.10 Bibliographie

- Marcelo Alonso et Edward Finn : Physique générale tome 2, champs et ondes, Interéditions.
- Collectif d'enseignants, Université de Californie à Berkeley : Cours de physique de Berkeley, Tome 3, Ondes, Dunod.
- Eugene Hecht : Physique, De Boeck Université.
- Richard Feynman : Cours de physique, Mécanique 1 et 2, Dunod.