L3 Physique-Chimie, UJF Grenoble

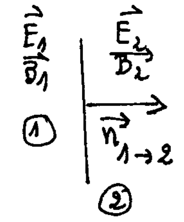
CORRIGÉ PARTIEL ELECTROMAGNÉTISME-PROPAGATION

25/10/2007 – durée 1h30

Ph. Brulard
M. Barthelemy

1. Questions de cours

/2 1.1. $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to 2}$



σ en $C\,m^{-2}$
E en $V\,m^{-1}$
ε_0 en $F\,m^{-1}$

$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1\to 2}$

B en T
μ_0 en $H\,m^{-1}$
j_s en $A\,m^{-1}$

/2 1.2.1. $\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ $\qquad \operatorname{div}\vec{B} = 0$

$\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\qquad \vec{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

/1 1.2.2. $\vec{\operatorname{rot}}(\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{E}) = \vec{\operatorname{rot}}\left(-\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{B}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

Remarque : pour établir l'équation d'onde, on fait l'hypothèse que le milieu est le vide, en l'absence de charges et de courants.

$\vec{\operatorname{rot}}(\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{E}) = \vec{\operatorname{grad}}(\underbrace{\operatorname{div}\vec{E}}_{0}) - \Delta\vec{E} \quad\Rightarrow\quad \Delta\vec{E} = \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$

/1 1.3. Une onde plane est une onde qui a la même valeur en tout point d'un plan perpendiculaire à la direction de propagation à un instant donné.
(être exigeant sur la précision de cette réponse).

/0,5 1.4.1. $\vec{R} = \dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$

/3 1.4.2. a) $u_{em} = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \dfrac{B^2}{2\mu_0}$ densité volumique d'énergie électromagnétique (en $J.m^{-3}$)

b) Chaque intégrale représente une puissance.

$\iiint_V \dfrac{\partial u_{em}}{\partial t}\,d\tau$: puissance électromagnétique contenue dans le volume V

$\iiint_V \vec{j}\cdot\vec{E}\,d\tau$: puissance cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charges contenus dans V à l'instant considéré

$\oint\!\!\oint \vec{R}\cdot\vec{dS}$: flux du vecteur de Poynting à travers la surface S limitant le volume V (surface orientée vers l'extérieur : c'est un flux sortant). Représente la puissance électromagnétique transportée à travers cette surface par le champ électromagnétique.

Notation : dire que $\oint\!\!\oint \vec{R}\cdot\vec{dS}$ représente le flux de $\vec{R}$ à travers la surface S seulement ne rapporte aucun point.

1.5. Si on choisit pour l'onde une représentation vectorielle par exemple $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{E} \ldots)$:

/1 1.5.1. a) $\vec{E} = \vec{E}_0\cos\left(\omega\left(t - \dfrac{x}{v}\right) + \varphi\right)$ accepté

L'expression la plus générale est $\vec{E} = \mathcal{R}e\left(\vec{\mathcal{E}}_0\, e^{i\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right)}\right)$

/1 b) $\vec{E} = \mathcal{R}e\left(\vec{\mathcal{E}}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{OM} - \omega t)}\right)$ ou $\mathcal{R}e\left(\vec{\mathcal{E}}_0\, e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{OM})}\right)$

/0,5 1.5.2. $\vec{E}$ et $\vec{B}$ transverses (perpendiculaires à la direction de propagation)
Aucune démonstration exigée.

2. Champ $\vec{B}$ créé par une densité volumique de courant dans un cylindre

2.1. Le plan passant par un point M et contenant l'axe Oz est plan de symétrie
/1 de la distribution de courants donc $\vec{B}(M)$ est perpendiculaire à ce plan : $\vec{B}(M) = B(M)\vec{u_\theta}$
Invariances : - par translation suivant Oz
/0,5 - par rotation suivant θ autour de Oz

donc $\vec{B} = B(r)\vec{u_\theta}$

$r \leq a$: $\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 j_0 \vec{e_z} \Leftrightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r B(r)) = \mu_0 j_0 \Rightarrow \frac{d}{dr} r B_\theta(r) = \mu_0 j_0 r$

/2 $r B_\theta(r) = \mu_0 j_0 \frac{r^2}{2} + Cte$, $B_\theta(r) = \mu_0 j_0 \frac{r}{2} + \frac{Cte}{r}$

quand $r \to 0$ $B_\theta(r) \to \infty$ impossible donc $\boxed{\vec{B}_{int}(r) = \mu_0 j_0 \frac{r}{2}\vec{u_\theta}}$

$r \geq a$: $\vec{rot}\,\vec{B} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r B_\theta(r)) = 0 \Rightarrow r B_\theta(r) = Cte' \Rightarrow B_\theta(r) = \frac{Cte'}{r}$

distribution volumique de courants donc continuité de $B_\theta(r)$ en $r = a$

/1 $\frac{Cte'}{a} = B_{int}(a) = \mu_0 j_0 \frac{a}{2} \Rightarrow Cte' = \mu_0 j_0 \frac{a^2}{2}$ et $\boxed{\vec{B}_{ext}(r) = \mu_0 j_0 \frac{a^2}{2r}\vec{u_\theta}}$

2.2. $\vec{B} = \vec{rot}\,\vec{A}$

le plan passant par un point M et perpendiculaire à Oz : plan d'antisymétrie de
/0,5 la distribution de courants donc $\vec{A}$ est perpendiculaire à ce plan $\vec{A} = A(M)\vec{u_z}$
Invariances (idem que pour $\vec{B}$) : $\vec{A} = A(r)\vec{u_z}$

/1 $\vec{B} = \vec{rot}\,\vec{A} \Leftrightarrow B_\theta(r) = -\frac{\partial A_z(r)}{\partial r}$

$r \leq a$: $\mu_0 j_0 \frac{r}{2} = -\frac{dA_z(r)}{dr} \Rightarrow A_{z\,int}(r) = -\mu_0 j_0 \frac{r^2}{4} + Cte_2$

$r \geq a$: $\mu_0 j_0 \frac{a^2}{2r} = -\frac{dA_z(r)}{dr} \Rightarrow A_{z\,ext}(r) = -\mu_0 j_0 \frac{a^2}{2} \ln r + Cte'_2$

/1 $\vec{A}$ est connu à un gradient près
on choisit donc arbitrairement la valeur de A en un point (par exemple $A = 0$ en $r = a$) d'où Cte'_2 et Cte_2 est obtenu par continuité en $r = a$

alors $\vec{A}_{ext} = -\mu_0 j_0 \frac{a^2}{2} \ln\frac{r}{a}\,\vec{u_z}$

$\vec{A}_{int} = \frac{\mu_0 j_0}{4}(a^2 - r^2)\,\vec{u_z}$

3.

Le vecteur d'onde est $\vec{k} = \frac{k}{3}(2\vec{u_x} + 2\vec{u_y} + \vec{u_z})$. Sa norme est égale à k. La relation de disper-
/1 3.2 sion étant $\omega = kc$, les définitions $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ et $\omega = 2\pi f$ donnent : $f = \frac{c}{\lambda} = 5.10^{14}$ Hz.

0,5 3.1 L'onde fait partie du domaine visible. puisque $450\,\text{nm} \leq \lambda \leq 700\,\text{nm}$

1 3.3. $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 10,5.10^6\ \text{m}^{-1}$.

Onde de la forme $E_0 \exp i(\vec{k}.\vec{OM} - \omega t)$ caractéristique d'une OPPM.

0,5 3.4. ~~Un plan d'onde est un plan équiphase donc l'équation des plans d'onde est $2x + 2y + z = $ cste (on vérifie que les plans d'onde sont orthogonaux au vecteur $\vec{k}$).~~

3.5. Le champ électrique vérifie l'équation de Maxwell-Gauss dans le vide : $\text{div}\,\vec{E} = 0$, soit
1,5 $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$, ce qui donne, tous calculs faits, $E_y = -E_x$.

3,5 **3. 6.** L'onde est plane progressive, on peut donc appliquer la relation de structure :

$$\overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{E}}{\omega} = \frac{E_x}{3c}\left(\overrightarrow{u_x} + \overrightarrow{u_y} - 4\overrightarrow{u_z}\right)$$

3. 7.

2 $\left\langle \overrightarrow{\Pi} \right\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\overrightarrow{E} \wedge \frac{\overrightarrow{B^*}}{\mu_0}\right) = \varepsilon_0 c E_0^2 \overrightarrow{u}$ où $\overrightarrow{u}$ est le vecteur unitaire dans le sens de propagation de l'onde. La relation $\left\langle \overrightarrow{\Pi} \right\rangle = c\left\langle u_{em}\right\rangle \overrightarrow{u}$ traduit le fait que l'énergie se déplace à la vitesse c dans la direction $\overrightarrow{u}$.

4.

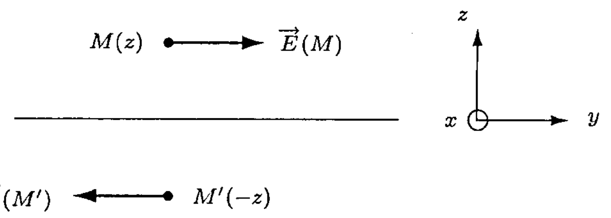
2 **4.1.** Si $\overrightarrow{B}$ est constant, il n'y a pas de champ électrique donc pas de courant dans la plaque. Le champ magnétique étant continu en $z = \mp\frac{a}{2}$, le champ magnétique à l'intérieur de la plaque est égal au champ extérieur : la plaque ne modifie pas le champ magnétique.

1 **4.2.1** D'après l'équation de Maxwell-Faraday, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$, la variation de $\overrightarrow{B}$ au cours du temps est à l'origine d'un champ électrique donc de courants dans le conducteur.

4.2.2. Le système étant invariant par toute translation selon Ox et Oy, le champ $\overrightarrow{E}$ ne dépend que de z. Le plan (Mxz) est plan de symétrie de la plaque. Le champ $\overrightarrow{B}(t)$, source de $\overrightarrow{E}$, est symétrique par rapport à ce plan. Or $\overrightarrow{B}$ est un pseudo-vecteur. Ce plan est donc un plan d'antisymétrie du champ électrique qui est alors orthogonal à ce plan. Finalement : $\overrightarrow{E}(M) = E(z)\overrightarrow{u_y}$.

De plus, le plan (Oxy) est plan de symétrie géométrique de la plaque et plan de symétrie pour le champ $\overrightarrow{B}(t)$. Le champ $\overrightarrow{E}$ est donc antisymétrique par rapport à ce plan :

3



donc $\overrightarrow{E}(z) = -\overrightarrow{E}(-z)$.

4.2.3. $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \Rightarrow \iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dS} = -\iint_S \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}\,\overrightarrow{dS} \Leftrightarrow \oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dl} = -\frac{d}{dt}\iint_S \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{dS} = -\frac{d\Phi}{dt}$

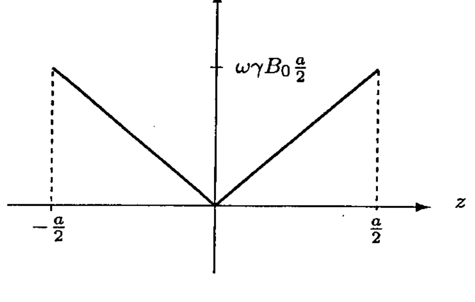
2 Le sens d'orientation de $\mathcal{C}$ est lié au sens d'orientation de $\overrightarrow{dS}$ (règle du tire bouchon...)

4.2.4 La forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday s'écrit : $\mathcal{C}_E = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$. On calcule la circulation du champ électrique le long d'un rectangle identique à celui de la figure 2. La circulation de $\overrightarrow{E}$ le long du rectangle est égale à $\mathcal{C}_E = 2E(z)h$. Le flux de $\overrightarrow{B}$ à travers la surface du rectangle est $\Phi_B = -B \times 2zh$ (attention à l'orientation relative du contour et du champ magnétique.) Finalement :

$$\overrightarrow{E} = z\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_y} = -\omega B_0\, z\, \sin(\omega t)\overrightarrow{u_y}.$$

Cette expression est valable dans la plaque, quel que soit z (c'est bien une fonction impaire). Le courant $\overrightarrow{j}$ dans la plaque est donc $\overrightarrow{j} = \gamma\overrightarrow{E} = -\gamma\omega B_0\, z\, \sin(\omega t)\overrightarrow{u_y}$. Son amplitude $j_0 = \|\overrightarrow{j}\|$ a donc pour graphe :

4



4.2.5 La puissance dissipée par effet Joule dans la tranche $\{z, z+\mathrm{d}z\}$ est égale à :

$$\mathrm{d}\mathcal{P} = \gamma j^2(z) S\,\mathrm{d}z = \gamma\omega^2 B_0^2\, z^2\, \sin^2(\omega t) S\,\mathrm{d}z.$$

En valeur moyenne dans le temps : $\langle \mathrm{d}\mathcal{P}\rangle = \frac{1}{2}\gamma\omega^2 B_0^2\, z^2\, S\,\mathrm{d}z$.

Pour tout le cylindre :

2,5

$$p(\tau) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{1}{2}\gamma\omega^2 B_0^2\, z^2\, S\ \mathrm{d}z = \frac{1}{24}\gamma B_0^2\omega^2 a^3 S.$$

Le volume τ est égal à $\tau = aS$, d'où :

$$\tilde{p} = \frac{1}{24}\gamma B_0^2\omega^2 a^2.$$

4.2.6.
L'application numérique donne : $\tilde{p} = 637$ MW.m^{-3}.

0,5